第 13 回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

一般命題の証明の論理的構造

ー授業における証明の国際比較研究に向けてー

宮川　健
早稲田大学

要　約

本研究は，中学校における証明に関する国際比較研究プロジェクトの一環で，異なる国や地域の数学授業で見られる多様な証明をより客観的に分析し，比較可能にする新たな視点を探ることを目的とする．本稿では，中学校段階で扱われる一般命題（一般性をもつ命題）の証明の論理的構造に着目し，それを整理するとともに, 整理して得られた視点が授業でしばしば見られる証明をいかに特徴づけることが可能なのかいくつかの事例を通して検討した．具体的には，述語論理を含む記号論理により定式化される論理的構造を参照しつつ，一般命題の証明の論理的構造が‘任意特定の対象の選択と仮定’，‘モデル証明’，‘一般化’という構造をもつことを提案した．さらに，その視点から，「素朴な経験主義」，「決定実験」，「生成的な例」，「思考実験」など，妥当性の異なる証明の構造と相互関係がいかに特徴づけられるのか示すとともに，ドイツと日本の授業で観察された証明の比較分析にその視点がいかに利用可能か検討した．

キーワード：中学校数学，数学的証明，記号論理

1．はじめに

学校教育において数学的証明として受け入れられるものは，国や地域によって異なる (Miyakawa, 2017)．そのため，日本で教えている証明が他国では受け入れられないということも生じる．さらに，数学教育学の研究コミュニティにおいて共有されている証明の定義というものは必ずしも存在せず, 研究者によって証明の捉え方が異なることが指摘されている (Balacheff, 2008; Stylianides et al., 2016).

そうした中で，筆者は中学校段階の証明に関する国際比較研究プロジェクトに参画し，証明の本質がそもそもどこにあるのか（どこにあると考えられているのか）ということを探っている．

本稿は, その一環で, 証明の論理的構造に焦点を当て，それを特徴づける視点を検討することを目的とする．構造という証明の側面はこれまでもしばしば着目されてきた (平林, 1958; Duval, 1991, 2002; Miyazaki et al., 2017)．とりわけ，演繹的推論の構造やアーギュメンテーションの構造などが検討され，証明の特徴付けが試みられてきた (Pedemonte, 2007; Knipping & Reid, 2019).

一方, 本創成型課題研究で問題とするように, 証明には, プロダクトとしての証明のみならず, プロセスとしての証明活動をはじめとして，様々な側面がある. そのため, 構造といっても, 何を‘証明’と捉えるかによって検討されるものが異なってくる. そこで本稿では, プロダクトとしての証明の論理的構造に着目し，以下の３点に取り組む.

・一般命題の証明の論理的構造の整理と提案
・妥当性の異なる証明の論理的構造の特徴づけ
・国際比較研究において見られた証明の事例分析

2．証明の論理的構造

(1) 証明の構造

一般的に，数学における証明はある主張や言明の正しさを示す手段である．日本の中学校では，一

般性を保証するという点が強調され，文字式や図形の領域で一般性をもつ主張（以下，一般命題）の妥当性が証明により示される．証明には，背理法，数学的帰納法，反例，対偶法，転換法，同一法などさまざまな手法が用いられる．こうした中で，より基本的と思われる中学校での証明法には必ずしも名前はついていないようである．

証明は，しばしば演繹的推論や演繹からなるとされる．学習指導要領解説によれば，数学的な推論には帰納，類推，演繹があり，「演繹は，前提となる命題から論理の規則に従って結論となる命題を導き出す推論である」（文部科学省，2017, p. 35）とのことである．しかしながら，一般命題を導く演繹の構造は必ずしも明確ではない．

歴史的にみても，一般命題に対する数学的証明の論理的構造をより明確に定式化できるようになったのは，19 世紀後半から 20 世紀にかけて発達した記号論理（もしくは数理論理学）が十分に確立してからである．例えば，ゲンツェンが考案した演繹体系の一つである「自然演繹」は，「数学の演繹的推論をほぼそのままの形で推論規則として取り入れている」（高崎, 2014, p. 66）ため，数学的証明に含まれる論理的構造をうまく示してくれる．

記号論理には，命題論理と述語論理と呼ばれる領域があり，それぞれにおいて数学における証明の論理的構造を定式化できる．命題論理では，命題を一つの記号に置き換えて命題間のつながりなどの構造を検討する（$P \rightarrow Q$ など）．一方，述語論理では，命題を主語と述語に分解して記号化する（$P(x)$など）．述語論理の最大の特徴は，「すべての〜は〜である」といったように主語の量（量化）を問題とできる点である（一階述語論理）．

命題論理では命題間のつながりしか問題としないため，命題が扱う量の多少は記述できず，一般命題でも，ある特定の対象に対する主張（以下，単称命題）でも，同等に記号化されてしまう．そのため，中学校で扱われるような一般命題がいかに証明されるのかその構造を詳細に示すことはできない．

そこで以下では，述語論理を含む記号論理（とりわけ自然演繹）を参照しつつ，中学校で見られる証明の構造を整理する．まず単称命題の場合について検討し，その後，一般命題の証明を検討する．

(2) 単称命題の証明の構造

単称命題は上述のように，ある特定の対象に対して真偽の定まる主張を意味する．例えば，「12 は 3 の倍数である」，「√2 は無理数である」，「ΔABC≡ΔCDE」などである．単称命題の証明の構造は，先行研究でもしばしば検討されてきた．

Duval (1991, 2002) は演繹的推論には，「推論 (inférence)」と「連鎖 (enchaînement)」の 2 種類の過程があるとする．「推論」は，演繹的推論の一ステップであり，仮定や以前のステップで得られた所与命題から公理や定理，定義などを通して新たな命題を得るものである．そこでは図 1 のように，所与命題が定理等の条件を満たしているか確認し，定理等の結論部分が切り取られ，このステップの結論（帰結命題）となる．そして，このステップの「連鎖」により証明が構成されるとする．

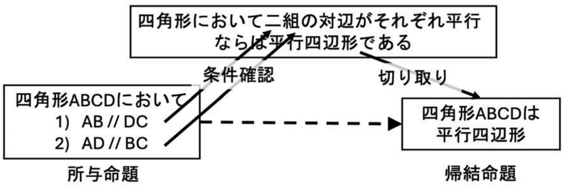

図 1　演繹的推論の一ステップ

また，Miyazaki et al. (2017) は述語論理の視点を取り入れ，Duval のものを精緻化するような形で演繹的な証明の構造を示す．そこでは二種類の推論が重要になってくると指摘する．ひとつは定理の利用において「普遍例化 (universal instantiation)」を用いた推論，もう一つは推論の連鎖の結果として得られた結論が当初の条件のもと成り立つという命題を得る際の「仮言的三段論法 (hypothetical syllogism)」を用いた推論である．

普遍例化は，記号論理における「全称記号∀削除」の推論規則に相当する．図 1 では，定義に与えられた条件と所与命題の間で条件確認がなされ，結論部分が切り取られると考えた．すなわち，命題論理の範疇で，$P \rightarrow Q$ と P から「→除去」もしくは「肯定式 (modus ponens)」と呼ばれる推論規則を用いて Q を得ることと記号化できる．一方，普遍例化の場合は，定義や定理が特定の対象に当てはめられて，それから推論がなされると考える．記号を用いれば，「$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$」という定理に相当するものをある対象 a に適用し，「$P(a) \rightarrow Q(a)$」

を得て，すでに $P(a)$ が知られていることから，肯定式を用いて $Q(a)$ を導く推論とみなせる．

一方，「仮言的三段論法 (hypothetical syllogism)」は，命題論理の範疇でしばしば用いられるもので，$P \to Q$ と $Q \to R$ から $P \to R$ を導く推論規則である．Miyazaki et al. (2017) は，これにより証明の最初の仮定と最終的な結論を結合できるとする（この点は, Duval の示した構造では言及されていない）. 例えば, 図 1 の後に四角形 ABCD が平行四辺形であることから AB＝DC を得たとすると，仮言的三段論法を用いて「四角形 ABCD において，AB//DC, AD // BC ならば AB＝DC」と主張できる．述語論理の視点からすれば，ここでの推論は，$P(a)$ が仮定だった際に, 演繹のステップを踏み, $R(a)$ を得て, 最終的に $P(a) \to R(a)$ を導くことに相当し，「→導入」の推論規則を用いた推論とみなせる．

確かに, 中学校で扱われる証明においては, 普遍例化や肯定式, さらに仮言的三段論法（もしくはそれらに相当する推論規則）がしばしば用いられると考えられる. 一方, ここで示した推論規則を用いた証明では，$P(a) \to R(a)$といった単称命題を導くことはできるが，$\forall x(P(x) \to R(x))$といった一般命題は導けない．証明の主たる機能が一般命題の妥当性を示すことにあるとすれば，それはいかにしてなされるのであろうか．その際の証明の本質的な構造はいかなるものであろうか．この点について先行研究で言及されることは少ない．

(3) 一般命題の証明の構造

記号論理の視点から，中学校で扱うような証明の論理的構造をいかに示せるのかという点については，すでに宮川・國宗（2015）で示されている．$\forall x(P(x) \to R(x))$と表現される一般命題を導くためには，命題論理の推論規則に加え，「全称記号∀導入」など述語論理の量化に関わる推論規則が用いられる. そこでの形式的証明は複雑であり, 一般命題の証明の構造として何が本質的なのか不明瞭である. そこで以下では, 筆者の考える本質的な構造を示す．この構造は記号論理で示される構造と整合するため，随時それとの対応に言及する．

まず, ここで取り上げる証明法は, 中学校で見られる文字式の証明や図形の証明で用いられる一般命題の証明法である. 例えば, 連続３整数の和の場合，図 2 のような証明である．ここで用いられている証明法には名前が付いていないことが多いが,「選択法 (choose method)」と呼んでいる文献があったので（Solow, 2013）[1]，本稿ではそれを援用することとする．

連続する 3 つの整数のうち，いちばん小さい数を n と表すと，連続する 3 つの整数は，$n, n+1, n+2$ と表される。これらの和は,
$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$
$n+1$ は整数だから，$3(n+1)$ は 3 の倍数である。したがって，連続する 3 つの整数の和は，3 の倍数である。

図 2　教科書の証明（岡本ほか，2021，p. 24）

こうした証明によりなぜ一般命題が証明できるのだろうか. 選択法による証明の本質的な構造は,結論から述べれば次の三段階と考える．

1. 任意特定の対象の選択と仮定
2. モデル証明
3. 一般化：一般命題の結論

一般命題では，確かめるべき対象が無限個あるためすべてを確かめることができない．そこで選択法では，無限個ある条件を満たす対象からある一つの対象を選び，それが条件を満たすと仮定する. これが第一段階の「任意特定の対象の選択と仮定」である．図 2 では，1, 2 行目で一つの整数を選択しそれを n とラベル付けするところである[2].

ここで注意が必要なことは，文字 n は “すべての整数” を表しているわけでは必ずしもなく, 具体的には指定していないが任意に選ばれ固定された特定の一整数を表している点である．「任意特定」という語はこのことを意味する．この語は最近あまり用いられないようだが，以前はある集合全体を表す「任意一般」と区別して用いられていたようである（末綱, 1952）．実際，平林 (1958) は，図形の証明の場合に一般命題を証明する際に特殊な図形で証明を行うことを指摘し，その特殊な図形が「実は一般を背負い，一般を代表している任意定数的なもので，任意一般に対する任意特定といわれるものである」(p. 11) と指摘する．

記号論理の視点からすれば，この第一段階はある対象が証明すべき一般命題の条件を満たすとい

う仮定（$P(n)$など）を置くことに対応する．特に推論規則は用いられない．主語を表す記号 n は「自由変数」などと呼ばれ，束縛変数と呼ばれる$\forall xP(x)$の x とは区別される．ただし，記号論理における証明は，あくまでも記号の操作によるため，記号の表す意味は問題とならない．n を任意特定とするのはあくまでもその意味を考慮に入れた場合のことである．

第二段階では，任意特定の場合に結論となる性質が成り立つことを証明する．この証明を，本稿では Solow (2013) にならって「モデル証明 (model proof)」と呼ぶ．図 1 では，２行目の「連続する」から５行目の「$3(n+1)$ は 3 の倍数である。」までがモデル証明となる．

モデル証明は，無限個の対象を含む集合から任意に選択した対象に対するものである．そのため，その結論は一般命題ではなく単称命題である（$P(n) \rightarrow Q(n)$など）．その論理的構造は前節で述べた単称命題の証明の構造に一致する．

第三段階では，モデル証明において，最初に任意特定として選んだ対象（図 2 では n）が使われている部分をすべて別の対象（整数）に置き換えても主張を同様に確かめることができると判断できれば，残りのすべての対象でも確かめられたとして，一般命題の結論が導かれる．この判断は通常難しいが，Solow (2013) の言葉を用いれば，

「実際にある性質をもつすべての対象に対してあることが成り立つことを証明する代わりに，選択法はモデル証明を用いることを通してそうできることの“可能性 (capability)”を与えるのである」 (p. 56).

今回の場合は，n という対象に固有な仮定を使っておらず，n の性質に依存していないので，その可能性が示され一般化できる．記号論理の視点からすれば，この段階には「全称記号$\forall$導入」の推論規則が用いられる（$P(n) \rightarrow Q(n)$ から$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ を得る）．この推論規則を適用できるかどうかは，適用条件[3]を満たしているか否かに依存する．

以上が選択法の本質的と考えられる構造である．

３．様々な証明の論理的構造

先行研究では，学校現場で見られる種々の妥当性判断の手法が指摘されている (Harel & Sowder, 1998). その代表的なものに，「素朴な経験主義」，「決定実験」,「生成的な例」,「思考実験」がある（バラシェフ, 1997）. これら四つの証明[3]がどのような論理的構造をもつのか，選択法の構造を視点にそれぞれの特徴と相互関係を示す．

(1) 素朴な経験主義

「素朴な経験主義 (naïve empiricism)」は，いくつかの例から一般法則を導き出す証明である．例えば，図 3 のようなものである．

2+3+4=9=3×3
3+4+5=12=3×4
4+5+6=15=3×5
いつも 3 の倍数になっているので，連続する 3 整数の和はいつも 3 の倍数になる．

図 3　素朴な経験主義

これは演繹的推論ではなく帰納的推論である．選択法の第一段階については，最初の数が 2, 3, 4 の場合がそれぞれ選ばれているが，その選択基準は述べられていない．任意特定として選ばれた可能性もないとはいえないが，任意性は低く思える．一方，第二段階の和が 3 の倍数になる理由を示すモデル証明は，9, 12, 15 がそれぞれ $3 \times n$ と書けることのみからなる．選択法のような，なぜ $3 \times n$ と書けるのかを示すモデル証明は与えられておらず，すべての対象に対して成り立つ“可能性”を示していない．第三段階については，いくつかの事例から一般化がなされている．

述語論理の視点からすれば，最初の整数を 2 と仮定した場合に，$P(2) \rightarrow Q(2)$ が導かれ一般化していると考えることもできる．しかしながら，3 の倍数であるという $Q(2)$ が 9 という 2 の場合に得られる数に依存しているため，2 を整数とする仮定を閉じて $P(2) \rightarrow Q(2)$ を導くことができず，推論規則「全称記号$\forall$導入」が適用できない．

(2) 決定実験

「決定実験 (crucial experiment)」は，任意に一つ条件を満たす事例を選択し，それについての性質を一般化するものである．例えば図 4 である．

この証明では，適当に大きな数を考えて 178 という整数を選択しており，必ずしも 178 でなくても良いことがわかる．そのため，任意特定の数が選

択され整数である条件を仮定していると解釈できる．この点については選択法を用いた証明（図 2）の第一段階と同様である．一方，第二段階と第三段階は，選択法ではなく，素朴な経験主義と同様になっている．すなわち，和が 3 の倍数になる理由を示すモデル証明は与えられておらず，一般化（∀導入）についても同様の問題がある．

適当に大きな連続する 3 整数を考える．
178+179+180=537=3×179
和が 3 の倍数なので，連続する 3 整数の和はいつも 3 の倍数になる．

図 4　決定実験

(3) 生成的な例

「生成的な例 (generic example)」は，具体的な対象を用いているものの，一般性を視野に入れた証明である．例えば，図 5 や図 6 である．

8+9+10 = 8 + (8+1) + (8+2) = 3 × 8 + 3 = 3 × (8+1) となるので，連続する 3 整数の和はいつも 3 の倍数になる．

図 5　生成的な例 1

○○○○○○
○○○○○○○
○○○○○○○○
となるので，連続する 3 整数の和はいつも 3 の倍数になる．

図 6　生成的な例 2

図 5 では，特定の 8 という数で連続する 3 整数の和を検討している．図 6 においては最初の数が 6 の場合であるが，○でそれが表現されている．この 8 や 6 が最初にどのように選択されたのか証明には明記されていない．しかしながら，その後の議論が別の場合にも適用できそうであるため，任意特定の整数が選択されたものと解釈できる．すなわち，第一段階については，選択法の数学的証明や決定実験と同様の構造をもつといえる．

第二段階に関しては，図 5 では，最初の整数が 8 の場合に，なぜ連続する 3 整数が 3 の倍数になるのか示している．式のみだがモデル証明と解釈できる．図 6 の方では，最初の整数が 6 の場合に○を使った図でモデル証明を与えている．ここでのモデル証明はいずれの場合も，選択した整数のもつ性質を用いずに連続する 3 整数の和がどのようにして 3 の倍数となるのかを示しており，選択した数を別の数に置き換えても同様に成り立つこと，すなわちすべての対象に対して成り立つことの“可能性”を与えており，選択法と同様の構造をもつ．すなわち，第三段階で一般化を可能とする．

述語論理の視点からすれば，推論規則「全称記号∀導入」の適用条件を満たしている．実際，図 5 では通常は a, n, x などの記号が用いられるところを 8 という記号を用いたまでと考えれば（紛らわしいが，記号論理では記号の意味は考えない），選択法を用いた数学的証明とまったく同様の構造である．逆に，選択法では文字を使っていても選択された任意特定の対象について証明しているため，そもそもモデル証明は生成的な例であったともいえる．

(4) 思考実験

「思考実験 (thought experiment)」は，具体的な対象を扱わず，言葉で主張の正しさを示す証明である．例えば，図 7 である．

ある整数において連続するその次の数とさらにその次の数を考える．
2 番目の数は 1 番目の数より 1 だけ大きいため 1 番目の数に 1 を足したものである．
3 番目の数は 1 番目の数より 2 だけ大きいため 1 番目の数に 2 を足したものである．
1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和は 1 番目の数の 3 倍と，2 番目と 3 番目の大きい分の数の 1 と 2 を足して得られた 3 を足したものとなる．
3 は 3 の倍数であるため，3 の倍数と 3 の倍数の和も 3 の倍数になる．したがって，連続する 3 整数の和はいつも 3 の倍数になる．

図 7　思考実験

図 7 の証明では，特定の数値や記号が使われていない．一方で，最初に「ある整数」とあり，任意特定のある整数が選択され仮定されていると解釈できる．すなわち，文字や数字は使われていないが，選択法の第一段階と同様，“任意特定の対象の選択と仮定”が見られる．

さらに，任意特定として選択した整数から連続する 3 整数の構造を示し，その和がいかにして 3 の倍数となるのかということを示している．これは，文章により与えられたモデル証明である．任意

特定の対象に対するものであること，そして選択した整数の性質に依存せずに 3 の倍数であるという性質を導いていることから，思考実験のモデル証明は，選択法のモデル証明と同様に，すべての対象に対して成り立つことの“可能性”を与える．そのため，第三段階の一般化を可能とし，図 7 の「したがって」以降の結論に至る．

思考実験の証明は，記号を用いないため，何が仮定されているのか，何が示されているのか，やや不明瞭ではあるものの，選択法を用いた数学的証明と同様の論理的構造をもつといえよう．

(5) まとめ

以上，四つの妥当性の異なる証明を一般命題の証明の構造の視点から考察した．この結果から，数学的証明とそれ以外の証明との連続性と乖離が明確になる．とりわけ，バラシェフ (1997) が「知的な証明」と呼ぶ三つの証明（生成的な例，思考実験，数学的証明）は，いずれも選択法の‘任意特定の対象の選択と仮定’，‘モデル証明’，‘一般化’の考えが含まれていることがわかる．これら三つにおいて互いに異なる点は，論理的構造ではなく，用いられる言語・表現にあるのである．

4．国際比較研究における証明の分析事例

(1) 日独国際比較研究プロジェクト

筆者らは，ドイツの研究グループと中学校段階の授業における証明についての国際比較研究プロジェクトを進めている (Shinno et al., 2024)．本プロジェクトでは，日独で同一のテーマについての授業のデータを収集し，授業における証明や証明活動がどのように異なり，どのような文化的な影響を受けているのか明らかにするとともに，証明の本質がどこにあるのかを探っている．

その中で，証明や証明活動を特徴づける研究者としての視点が必要となり，そのひとつとして‘構造’に着目した．本稿ではその一環で，プロダクトとしての証明の論理的構造を捉える視点を整理した．以下では，この視点が実際に国際比較研究にいかに利用可能なのか，日独の授業で見られた証明を用いた分析事例を示す．

日独の授業は，いずれも中学校第 2 学年相当（第 8 学年）を対象とした一単位時間分のもので，連続３整数の和を題材としている．以下では，それぞれの授業で最終的に得られた証明を取り上げ，その論理的構造の特徴を示す．

(2) 日本の授業の証明

日本の授業で最終的に与えられた証明は図 8 の黒板に書かれたものである．この証明は，教科書に見られる図 2 の証明と一言一句ほぼ一致する．そのため，この構造は既に示した選択法による数学的証明と同様である．ただし，授業では，文字 n の役割が十分に明確でなく，任意特定や一般化など本稿で示した証明の論理的構造が意識されていたかどうかはわからない．

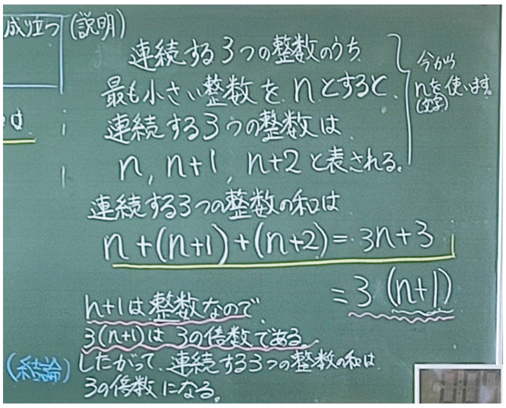

図 8　日本の授業の証明

(3) ドイツの授業の証明

ドイツの授業では，最終的に二つの証明が期待されるものとして与えられた（図 9 と図 10）．

> 三つの連続する数において，最初の数はいつも真ん中の数よりも 1 だけ小さく，三番目の数は 1 だけ大きい．
>
> 次の例がこのことを説明する：___ $\xleftarrow{-1}$ 8 $\xrightarrow{+1}$ ___
>
> もし三番目の数から 1 をとり最初の数に加えると，三つの数はすべて同じになる．
>
> 例：
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 7 | 8 | 9 |
> | ↓ +1 | | ↓ −1 |
> | 8 | 8 | 8 |
>
> 連続する三つの数の和を求めたければ，真ん中の数を取りそれを３倍する．
>
> 3 倍したので，このことが，和が 3 で割り切れるわけである．

図 9　ドイツの授業での証明１（和訳）

図 9 の証明は，文字を用いずに，具体的な数値を用いて例を与えつつ，一般的な言葉で証明が記されている．連続３整数のうち，二番目の数が 8 の

場合の例が与えられているものの, これは特に8でなくても構わないため，任意特定として選択された生成的な例と捉えられる. 一方, 例は与えられているものの, 言葉ですべて説明されているため, 思考実験の証明とも捉えられる. すなわち, 思考実験に生成的な例が加えられた証明と解釈できる.

三つの連続する数において，最初の数はいつも真ん中の数よりも 1 だけ小さく，三番目の数は 1 だけ大きい. このことを次のように表現できる. $(n-1)+n+(n+1)$ （n は中央の数） これは次のように変形できる. $(n-1)+n+(n+1)=n-1+n+n+1=n+n+n-1+1=3\cdot n$ 結果は $3\cdot n$ で，これはいつも 3 で割り切れる．答えは n で余りがない. $(3\cdot n): 3=n$

図 10　ドイツの授業での証明 2（和訳）

一方，図 10 の証明では代数表記が用いられている．ただし，図 9 同様，言葉による説明も多い．最初の 3 行は，和についての言及が抜けてはいるものの，言葉で説明したものが 5 行目で文字 n で表されている．その後は文字式の計算により $3n$ を導き，これが 3 で割り切れるという結論が，最終行の実際の計算と余りがないことの説明によって示されている（：はドイツの割り算の記号).

選択法の三段階の視点からすれば，まず，図 10 の証明では任意特定の整数の選択は不明瞭である. なぜならば最初の言葉による一文は何かの数を選んでその性質を述べているというよりは, 連続3整数の性質を一般的に述べていると捉えられるからである（図 9 も同様）．そして，文字を用いた式がその一般性質を表しているのか，それとも n を任意特定の整数として n の場合に成り立つことを示しているのか明確でない. より詳細に述べれば, 真ん中の数を n とすれば $(n-1)+n+(n+1)$ と表せるといった表現が，$\forall nP(n)$ を意味しているのか，任意特定のある整数 n において $P(n)$が成り立つことを意味しているのか，判断できない.

また, この証明におけるモデル証明は, 代数計算により $3n$ を導き，これが 3 で割り切れるところまでと解釈できる．そうすると結論がないため，n が任意特定として選択されていたと仮定すると，第三段階の一般化がなされていないと判断できる. したがって, n の扱いが曖昧なままで証明全体が与えられていることがわかる.

ここでドイツにおける証明の学習について触れておく必要がある．ドイツの中学校では, 日本と異なり, 証明は明確な指導内容となっていない. 数学を学習する中で, 理由を説明したり, 正当化したりすることはあるものの，証明をどのように書くのかということは指導していない. 一般に, 証明は数学的対象というよりは数学的活動を進める上で必要となる付随数学的対象 (paramathematical object) である（基礎論や数理論理学を除いて）．この証明の性格を反映した形になっているといえよう.

5．おわりに

以上，一般命題の証明の論理的構造を整理するとともに，それが学校現場の証明をいかに理解可能にしてくれるのか，いくつかの事例を通して検討した. 今後は, 証明の論理的構造の視点を用いて国際比較研究をさらに進めていく.

付記

本研究は JSPS 科研費 (20KK0053) のサポートを受けて実施したものである.

注

[1] この文献は邦訳されている（ソロー, 2023). 本稿での名称は原文に近い訳語を選んでおり, 必ずしも訳書のものと一致しない. 訳書では,「選択法 (choose method)」は「抽出法」,「モデル証明 (model proof)」は「証明のモデル」と訳出されている.

[2] 命題をどのように定式化するかによって，証明の構造が異なる．ここでは,「任意の数において，それが整数 (P) であれば，連続する３つの数の和は 3 の倍数 (Q)」, すなわち$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$ を想定している．別の方法としては,「任意の３整数において，それらが連続 (P_1) であれば，その和は 3 の倍数 (P_2)」，すなわち $\forall x\forall y\forall z\,(P_1(x, y, z)\rightarrow P_2(x, y, z))$ ともできる.

[3] a が $\phi\,[a/x]$ を導く証明の仮定の中にも，$\forall x\phi$

の中にも自由変数として現れないという条件である（高崎，2014, p. 132）.

[4] これらの四つは必ずしも日本の中学校数学科で「証明」として受け入れられるものとは限らないが，本稿では「証明」と呼ぶ．一方，図2のような，中学校で一般的に受け入れられている証明は，「数学的証明」と呼ぶ.

引用・参考文献

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM Mathematics Education*, *40*(3), 501-512. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2

バラシェフ, N. (1997). 数学的証明の学習の改善：実践を改善するための理論的枠組み．数学教育学論究, 67/68, 52-62.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261. https://doi.org/10.1007/bf00368340

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students? In F. L. Lin (Ed.), *Proceedings of the international conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 61–77). National Taiwan Normal University.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *American Mathematical Society*, *7*, 234-283.

平林一栄 (1958). 論証幾何学習の構造．日本数学教育会誌, 40(5), 10-13.

Knipping, C., & Reid, D. A. (2019). Argumentation Analysis for Early Career Researchers. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 3-31). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1

Miyakawa, T. (2017). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: the cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 37-54. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9711-x

宮川健・國宗進 (2015). 「中等教育を一貫する論証指導の視点からみた一般性の扱いについて～文字式を用いた代数的な証明の場合～」. 日本数学教育学会 第3回春期研究大会論文集. pp. 75-82.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 223-239. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

文部科学省 (2017). 中学校学習指導要領解説数学編． http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/1387016.htm（2024.6.28 参照）

岡本和夫ほか (2021). 未来へひろがる数学2. 啓林館.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 23-41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x

Shinno, Y. Bredow, F., Knipping, C., Hakamata, R., Miyakawa, T., Otani, H., & Reid, D. (2024). A preliminary analysis of two proof lessons from an international comparative perspective: a case study on German and Japanese grade 8 classrooms. In T. Evans, et al. (Eds.) *Proceedings of the 47th Conference of IGPME* (Vol. 4, pp. 97-104), PME.

Solow, D. (2013). How to read and do proofs: an. introduction to mathematical thought processes (6th ed.). John Wiley & Sons.

ソロー, D. (2023). 証明の読み方・考え方：数学的思考過程への手引き（西村康一・服部久美子訳），共立出版

Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Brill Sense.

末綱恕一 (1952). 数学の基礎．岩波書店.

高崎金久（2014）．学んでみよう！記号論理．日本評論社.