教授的構造からみた日本の証明授業の特徴

—ドイツの証明授業との比較を通した事例研究—

袴田　綾斗　真野　祐輔　　宮川　健　　大谷　洋貴
高知大学　　広島大学　早稲田大学　大妻女子大学

要　約

数学授業における証明活動および証明の特徴を理解しようとするとき, それらのアーギュメンテーション構造や論理的構造を分析することに加えて, それが展開され構成される場である授業の特徴を捉えることも必要である．本論文では，証明を扱う授業を記述・分析するために，教師と生徒の指導・学習行為のパターンを「証明授業の教授的構造」として概念化し，日本の証明授業の教授的構造を特徴づけることを目的とする．この目的の達成のため，教授的構造の記述枠組みを先行研究に基づいて設定し，日本の中学校とドイツのオーバーシューレ（普通前期中等学校）における「連続三整数の和」をトピックとする証明授業の比較を行った．教授的構造の比較を通して，日本の証明授業は，課題を理解したり例を構成したりする活動の時間が短く，証明をつくる活動に時間が割かれていることがわかった．この構造は，証明の論述方法の重視という日本の証明授業の特徴を示唆している．

キーワード：証明授業の国際比較，認識値，証明の書き方

1．はじめに：証明授業の教授的構造への着目

数学授業において展開される証明活動の特徴，あるいは，その活動の所産として構成される証明の特徴を捉えようとするとき，これまでの研究は，アーギュメンテーションの生成プロセスに着目したり (e.g. Knipping & Reid, 2019)，証明の演繹構造に着目したりしてきた (e.g. Miyazaki et al., 2017). 証明・証明活動の多様な側面を切り取ろうとしている点において，先行研究は確かに多面的にアプローチをしてきたし, 実際に, 教室で展開される多様で複雑な証明活動について，その指導に対する示唆を導いてきた.

しかしながら，これらの研究には共通して捨象している側面もある．それは，証明・証明活動が授業の中で展開され構成されたものであるということである．授業には，教える意図を持ち，教えるための何らかの手立てを講じる教師がおり, 1 時間前後という時間の制約の中で，ある一定のまとまりをもつ知識を（何らかの活動を通じて）学ばせようとする．そのような授業という特殊な時間・空間においては，Stigler & Hiebert (1999) が述べるように，教師と生徒の指導・学習行為に一定のスタイルやパターンのようなものが見られる．証明・証明活動も，ある授業において指導・学習されるものである．その授業には，証明されるべき言明（命題）を予想する局面があったり，証明のためのキーアイデアを探る局面があったりするだろう．そして，その各々の局面において，教師の指示や説明，発問といった手立てがあり，それに対する生徒の反応がある．授業における証明・証明活動の複雑さを理解しようとするとき，それら自体の特徴に加えて，それが展開され構成される場としての授業の特徴を把握することも必要である．

本研究プロジェクトでは，このような課題意識のもと，上述のスタイルやパターンを授業の「教授的構造」と呼び，証明授業の教授的構造を理解する

ことを目指している．本論文ではその一環として，日本の証明授業を特徴付けることを目的とする．

２．証明授業の教授的構造の記述枠組み

証明授業の国際比較を行うために Shinno et al. (2024) が提案したカテゴリーは，証明活動の教授的構造を記述するための一つの枠組みとなり得る．これは，Boero (1999) による「定理に関連する数学的活動の段階化」を参考にして作られたもので，証明授業の教授的構造を，以下の 7 つのカテゴリーの組合せで記述しようとするものである：

Ⅰ．プレ活動：課題を理解する，例を構成する
Ⅱ．言明の探索：言明を発見する（予想する），言明を理解する
Ⅲ．言明の定式化：共有された表現規則に従って言明を表現する
Ⅳ．証明アイデアの探索：証明のアイデアを発見する，証明のアイデアを理解する
Ⅴ．証明の定式化：証明を構成する，証明を発表する
Ⅵ．証明の省察：証明を評価する，証明を他者に説明する，証明を比較する
Ⅶ．応用活動：類似した証明問題に取り組む

この枠組みを用いることで，当該の証明授業でどのような活動が重視されているか，どのような活動は行われなかったか，などを記述することができる．また，異なる文化圏の証明授業を比較することで，教授的構造の文化的差異の理解にもつながるだろう．なお，この枠組みの各カテゴリーは排他的なものではなく，授業のある局面が，複数のカテゴリーに当てはまるものとして記述されることもある．さらに，必ずしもⅠからⅦの順に現れるとも限らず，同じカテゴリーの局面が複数回あったり，カテゴリー間の往還があったりすることも想定されている．

３．方法

本プロジェクトでは，日本（語圏）とドイツ（語圏）の証明授業の国際比較を進めている．教授的構造に注目する本論文においても，日本の証明授業の教授的構造を特徴付けるために，ドイツの証明授業との比較を方法とする．ドイツを比較対象とするのは，まず，日本とドイツは，コミュニケーションのスタイルに大きな相違がある言語圏としてしばしば言及されるためである (e.g. Hall, 1973; Meyer, 2014)．また，教授的構造に着目する本論文にとっては，Stigler & Hiebert (1999) が日本とドイツの授業スタイルを対比的に示していたことも大きな理由になっている．

ドイツの証明授業との比較対照をするためには，授業で扱われる数学的内容を揃える必要がある．本プロジェクトではこれまで，三角形の内角の和や三平方の定理など，いくつかの共通の内容について，教科書分析等も含む比較を行ってきたが (Hakamata et al. to appear)，本論文では，「連続する整数の和の性質」を共通の内容とする．日本の中学校数学カリキュラムでは，この内容は「証明」という用語が導入される前に「文字式の説明」として扱われるのが一般的である．それにも関わらずこの内容を選んだのは，データの典型性のためである．すなわち，プロジェクト内で収集された授業記録のうち，公立中学校で行われ，また，教科書の記述内容と順序に基本的に沿った形で展開された授業を採用した．以下で報告される結果は，1 つの授業のみを記述・分析したものであるが，このような典型性から，日本の証明授業の特徴に関する示唆は十分に得られると期待される．

日本の授業データは，2023 年に高知県の中学 2 年生の数学授業（50 分）で収集したものである．比較対象であるドイツの授業データも 2023 年に収集したもので，ブレーメン州にあるオーバーシューレ（普通教育の前期中等段階にあたる校種）の 8 年生の数学授業（80 分）であった．いずれの授業の参加生徒も，文字を用いた数量の表現や文字式の計算は既習であった一方で，数学的な証明（文字を用いた説明を含む）については未習であった．

各国の授業はビデオカメラによって録画され，板書の写真記録，生徒のノート記述，ワークシートへの書き込みもデータとして分析に用いた．ドイツ語の音声・文字データについては，ドイツの研究協力者に英訳をしてもらい，必要に応じて協議することで共通理解を図った．上記のデータを用いて，授業をいくつかの局面に区切り，それぞれに対応するカテゴリーを同定していった．次章では，そ

れぞれの授業展開を概略的に提示しながら，カテゴリーの同定結果を示す．各項目に括弧書きで付されているのは授業開始からの経過時間である．なお，大谷（2025）には授業で展開された証明活動に関する発話記録が記載されている．

４．日本とドイツの証明授業の教授的構造

(1) 日本の授業

① 問題の把握と予想の生成（00:00–07:30）

授業は「1, 2, 3 や 6, 7, 8 のような連続する 3 つの整数の和について，いつも成り立つ性質を予想しよう」という問題の提示から始まった．まず，教師は「連続する 3 つの整数の和」の意味を生徒に尋ねながら確認した．この確認において，いくつかの例が用いられたが，生徒は追加の例をいくつかつくることで，和が 3 の倍数になるという予想を立てた．教師は「3 の倍数」と板書したのち，問題文の「いつも成り立つ」という文言や，数が無限にあるという事実を確認し，予想の正しさを説明する方法を考えようと投げかけた．

この局面では，題意の理解のためのプレ活動と，具体例からの帰納的推論による言明の探索が同時並行的に行われていたと捉えられる（Ⅰ＋Ⅱ）．また，教師による予想の板書は言明の定式化に相当するものである（Ⅲ）．

② 説明の方法の探索（07:30–15:00）

生徒は小集団学習の形態を取り，説明の仕方を話し合ったが，文字を用いるというアイデアには至らなかった．これに対して教師が「数を使っていたらできない」ことを強調して声掛けをすると，生徒から文字を使うという考えが発表された．教師はこれを受けて「数の性質を予想し，それがいつも成り立つことを，文字を使って説明しよう」というめあてを板書し，続けて「連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になる」と改めて予想を板書した．

ここでは，説明の方法を生徒に考えさせる手立てが講じられており，証明アイデアの探索が行われている（Ⅳ）．また，教師は局面①で板書した「3 の倍数」をそのまま用いるのではなく，完全な文の形で新たに予想を板書した．これは，言明の定式化が再度行われたものと解釈できる（Ⅲ）．

③ 説明の構成（15:00–34:00）

教師は生徒とのやり取りを行いながら，図 1 のように文字を用いた説明を板書した．説明の中で教師が強調した点の一つは，説明で用いる文字を明記する必要性であった．図 1 の右上にある「今から n (文字) を使います」はその時に板書されたものである．証明の内容に関しては，$3n+3=3(n+1)$ の式変形の箇所に重きが置かれた．教師はここで，3 の倍数が 3×(整数) で表せることを確認し，$3n+3$ を 3×(整数) の形で表すことを生徒に促した．また，得られた式 $3(n+1)$ から結論を導くために，丸括弧内の $n+1$ が整数でなければならないことも強調し，それを明記することも指導した．

文字を用いた説明が構成されたこの局面では，証明の定式化と同時に，どうすれば 3 の倍数であることを示せるかを考える場面もあり，証明アイデアの探索も含まれていた（Ⅳ＋Ⅴ）．また，説明を構成することと並行して，何を書かなければならないのか，なぜその記述が必要なのかを教師が解説する場面もあった．これは，証明の適切さの評価観点を示すややメタ的な活動であり，部分的に証明の省察が行われているものと捉えられる（Ⅵ）．

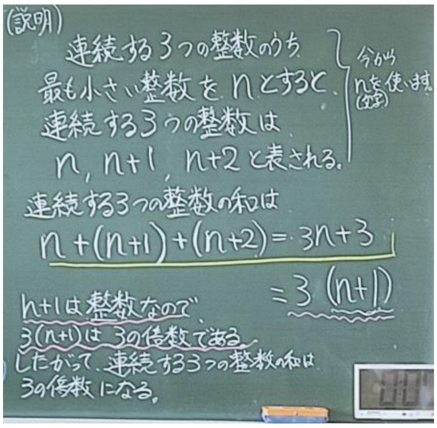

図 1 日本の授業で構成された説明

④ 説明の構造の振り返り（34:00–36:30）

予想の説明がなされたことを確認したのち，教師は，説明の表現形式についての補足を行った．他教科や総合的な学習の時間における「説明（プレゼンテーション）」を引き合い出し，説明にはまず導入部分があること，ここで前提を共有しないと説明の内容が伝わりにくいことの確認がなされた．そして，本論部分が続き，最後に結論を改めて述べるという表現形式が，本授業における説明の構造

と一致していることが強調された．これは証明の省察活動といえるだろう（Ⅵ）．

⑤ 適用問題とまとめ（36:30-50:00）

教師は残りの時間を使って，連続する整数の数を 3 から 5 に変えた場合の問題に取り組むよう指示した．これは生徒が用いている問題集に記載されているもので,「5 の倍数になる」という結論を示すための説明が穴埋め式になっている問題であった．解答が早く済んだ生徒が教師とともに他の生徒を支援したりその解答をチェックしたりした．この活動は応用問題への取り組みに相当するものである（Ⅶ）．

最後に, 授業の振り返りが行われた. 生徒がそれぞれに,“授業でわかったこと”,“もっとやってみたいこと”などをノートに書きとめた．

(2) ドイツの授業

① 具体的な連続三整数和の計算（00:00-39:30）

授業は「次の和をスマートに求める方法を見つけよう : 7＋8＋9, 51＋52＋53, 129＋130＋131, 5318＋5319＋5320」という問題の提示から始まった. 生徒から「先頭に 1 を足し末尾から 1 を引いて，中央の数を3回用いる」という方法が提案されたが，教師はこの方法を深く追求することはなく，次の課題を示した. 次の課題は, ワークシートに示された連続三整数和の計算方法に対して，その妥当性を議論するというものであった. 例えば「最初の数を 3 倍して 3 を足す」という方法の説明として，7＋8＋9＝7＋(7+1)＋(7＋2)＝…＝3・7+3 という計算が書かれており, 生徒はこの方法・説明が妥当であるかを議論した．

この局面における考察の中心は計算方法であり，連続三整数の和の性質が意識されていたとは捉えがたい．一方，この局面の活動は，以降の局面で構成することになる説明（証明）のアイデアにつながるものである．したがって，ここで行われていたプレ活動には，部分的に証明の探索も含まれていたと捉えられる（Ⅰ＋Ⅳ）．

② 性質の提示と説明の検討（39:30-49:30）

続いて，ある架空の生徒が見つけたという設定のもと「連続する 3 つの数の和は 3 で割れる」という性質が提示された. 加えて, この性質を正当化する説明も示され，生徒はこれらの妥当性を検討するよう求められた. 例えば「その和は中央の数の 3 倍になっているので, これを 3 で割ると余りがでない」という説明に対して，ある生徒は「9 から 1 を取って 7 に移すと，8 を 3 回足すことになり，それは 3 で割ることができる」のように，具体的な数値を用いて妥当性を主張した．他の生徒もこれに納得した様子を示し，次の課題へと移った．

ここでは，提示された言明とその証明（説明）に対して，その内容を理解し妥当性を評価する活動が行われている．生徒はその妥当性の判断にあたって具体的な数を用いていたものの，この局面では教師によって言明の定式化（提示）がなされ（Ⅲ），その探索（理解）と提示された証明の省察（評価）が行われていたといえる（Ⅱ＋Ⅵ）

③ 説明の構成（49:30-73:00）

教師は，局面②で扱った性質「連続する 3 つの数の和は 3 で割れる」について，具体的な数に対してではなく，文字を用いてすべての数に対して成り立つことを説明するよう生徒に求めた．教師と生徒は問いかけと応答のやり取りを通して, 図 2 に示す説明を構成した．図 2 の上部に書かれているのは「x 中央の数」で，下部に書かれているのは「これは 3 で割れる．なぜなら，x が 3 つあるからだ」という文である. 教師と生徒のやり取りの中で，数をどのように文字で表すか，式はどのように変形できるか，なぜ $3x$ が 3 で割り切れるのかなど，1 つずつ丁寧に確認がなされた．

この局面においては，文字を用いる場合の証明アイデアの探索とその定式化がなされていた（Ⅳ＋Ⅴ）．

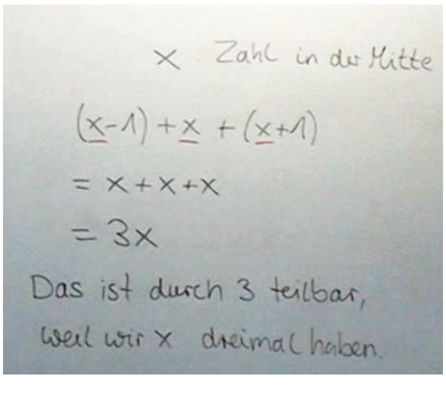

図 2 ドイツの授業で構成された説明

④ 適用問題への取り組み（73:00-80:00）

授業の残りの時間には，連続する 5 つの整数の

和について，性質の予想とその説明がなされた．ただし，文字を用いた性質の説明が課されていたわけではなく，生徒の多くは具体的な数値を用いた説明を行っていた．これは応用問題への取り組みにあたる（Ⅶ）．

(3) 結果のまとめ

各授業の教授的構造の記述結果を図 3 に示す．日本の授業はプレ活動が短時間であり，証明の定式化と応用が多くの時間を占めている．ドイツの授業はプレ活動が多くの時間を占めており，応用や省察は比較的短時間である．両国の授業を比較すると，プレ活動と言明の探索の長さに大きな違いがあることがわかる．また，日本の授業では言明の定式化が 2 回行われた（1 度目は「3 の倍数」であったのに対し，2 度目は「連続する 3 つの整数の和は 3 の倍数になる」と完全な文で表現された）．日本の授業に証明の省察が含まれていることも特徴的ある．加えて，日本の授業ではドイツよりも授業時間は短いにも関わらず，応用問題（適用問題）への取り組みに時間を割いていることがわかる．

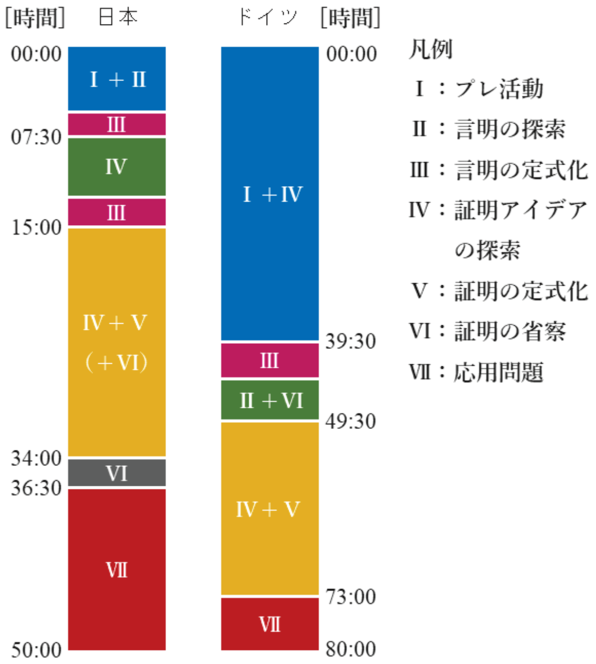

図 3 日本とドイツの授業のカテゴリーによる記述

5．考察と結論

(1) 日本の証明授業の教授的構造の特徴

上で示した結果から，日本の証明授業の特徴的な点として，生徒の予想に対する納得や確信の度合いを高めることよりも，一般性を示すための論述方式（証明の書き方）の指導に重きをおいていることが指摘される．Duval (1991) は，命題に対する確信の度合いを認識値 (epistemic value)とよび，同一の命題に対する証明であっても，認識値の変化は証明の仕方によって異なりうることを示した．直観的に納得できる根拠を用いた証明では，その命題の認識値は高まる一方で，形式的な論理操作による演繹では，その認識値は高まらない．日本とドイツの授業の教授的構造について，各カテゴリー内での指導・学習行為を比較すると，日本の授業内での証明活動においては，認識値の高まりがあまりなかったと考えられる．

ドイツの授業では，「連続三整数の和は 3 で割れる」という予想を「連続三整数の和は中央の数の 3 倍になる」という中間命題を証明（説明）することで示していた．この中間命題の認識値が，時間をかけて行われたプレ活動よって高まっていたことが推測される．加えて「3 倍されたものは 3 で割り切れる」ことの確認も，プレ活動や証明アイデアの探索・定式化の場面で繰り返しなされており，ドイツの授業では証明活動を通じた認識値の高まりが促進されていたと考えられる．

一方，日本の授業では，比較的短いプレ活動の中で 3 の倍数になることが予想されて以降，文字を用いた説明の方法に重点が移された．証明の定式化・探索の場面で「3 の倍数であることを示すためには何が必要か」といった観点からの問いかけもなされたが，焦点は 3×(整数) の形を代数的処理によってつくることにあり，連続三整数の和が 3 の倍数になる仕組みを理解することには重きは置かれていなかった．実際，ある生徒の振り返りには「すでに答えはわかっているのに説明をするとなると難しいので練習をして慣れていく」とあり，証明によって認識値が高まったわけではないことが伺える．日本の証明授業は，予想の認識値の高まりよりも，一般性を示すための証明の書き方の理解を促そうとする活動に特徴があるといえる．

(2) 日本の証明授業の特徴の背景要因

証明の論述方法の重視という特徴の現れは，日本のカリキュラムにおいて，証明が指導内容として位置づいていることに強い影響を受けていると

考えられる．証明そのものが指導対象になると，その評価の必要性も相まって，“共通の”型に従って書かれているかどうかが妥当な証明の一つの基準になるのではないだろうか．実際，図 1 で示した証明の書き方は教科書のものとほぼ同じであった．この視点からみると，証明の定式化（Ⅲ）が 2 度あったのは，予想された言明を教科書の表現に合わせるためだったとも推測される．

加えて，日本語圏には自身の主張をはっきりと述べて相手を説得する習慣がないことも遠因であると思われる (Meyer, 2014)．日常生活の中では主張の正当性を示すことに不慣れなため，その論述を指導するにあたっては，表現方法を明確にする必要性が生じる．数学における証明は，主張を示すタイプの論述の中でも特に厳密さが要求されるものであり，書き方の大枠を示すにとどまらず，細部まで書き方を教示することが要求されうる．

以上のように，証明授業の教授的構造への着目は，文化的・言語的営みとしての証明活動について，「授業の中で生じるもの」であることを捨象せずに分析することで，他の構造の観点からは捉えづらい特徴づけを可能にする．証明授業の文化的特徴やその背景（文化的条件）の研究は，数学教育における証明とは何かに関する国際的な研究動向に新たな知見をもたらすと期待される．

付記

本稿は Shinno et al., (2024) の分析を，日本の証明授業の特徴に焦点を当てて大幅に加筆修正を加えて再構成したものである．また，JSPS 科研費 (20KK0053) の支援を受けて実施したものである．

謝辞

本研究を進めるにあたり，ブレーメン大学の Cristine Knipping 氏，Fiene Bredow 氏，Nele Abels 氏にはデータの収集及びトランスクリプトの翻訳にご協力いただきました．ここに感謝申し上げます．

引用・参考文献

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.*

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233–261. https://doi.org/10.1007/BF00368340

Hakamata, R., Bredow, F., Knipping, C., Miyakawa, T., & Shinno, Y. (to appear). How proof-related words are used in German and Japanese mathematics textbooks. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Mathematics Textbook Research and Development.* Norway.

Hall, E. T. (1977). *Beyond culture*. Doubleday.

Knipping, C., & Reid, D. (2019). Argumentation analyses for early career researchers. In G. Kaiser, & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 3-31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_1

Meyer, E. (2014). *The culture map: Breaking through the invisible boundaries of global business*. PbulicAffairs.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 223-239. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9720-9

大谷洋貴 (2025). 代数授業におけるアーギュメンテーション構造の国際比較 —ドイツと日本の中学生による証明活動の特徴—. 日本数学教育学会第 13 回春期研究大会論文集.

Shinno, Y., Bredow, F., Knipping, C., Hakamata, R., Miyakawa, T., Otani, H., & Reid, D. (2024). A preliminary analysis of two proof lessons from an international comparative perspective: a case study on German and Japanese grade 8 classrooms. In T. Evans, O. Marmur, J. Hunter, G. Leach, & J. Jhagroo (Eds.). *Proceedings of the 47th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 97-104). PME.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. The Free Press.