教員養成課程における数学ゼミでの探究のケーススタディ

吉川　昌慶　　袴田　綾斗　　小川　俊彦　　濵中　裕明
兵庫教育大学　　高知大学　　早稲田大学　　兵庫教育大学

要　約

本稿の目的は，ATD における「世界探究パラダイム」に基づいた教師教育の一つとして，教員養成課程における探究型数学ゼミの可能性を，複数の事例をもとに検討することにある．ここで事例として示す探究型数学ゼミは，ATD における SRP（Study and Research Path）に基づくものである．従来のいわゆる数学テキスト輪読型のゼミを探究型数学ゼミに変えることで，どのような学習が生じるのか，また，生じさせることができるのか，そこで扱う内容は従来のものとどう異なってくるのか，などを議論し，今後，教員養成課程において真正の探究を扱うゼミを展開する際の留意点と可能性を提示していきたい．

キーワード：教授人間学理論，大学数学教育，探究型数学ゼミ

1．はじめに

教員養成課程におけるゼミは，主に数学教育学と数学の二種類が実施されることが多いと考えられる．その中で，数学のゼミにおいては，どのような内容が展開されているのであろうか．教員養成学部に所属する数学担当の大学教員は，多くの場合，純粋数学を専門としており，理学部等での自身のこれまでの経験にもとづき，ゼミを運営していることが多いのではないかと推察される．端的に言えば，学部生が理解可能な内容を含む数学書をテキストとし，いわゆる輪読形式でゼミが進行することが一般的であると思われる．

しかしながら，この輪読形式のゼミは，理学部等で数学者の育成を目指す場合には，伝統的かつ有効な方法であると考えられる一方で，教員養成においてその効果はいかがであろうか．確かに，数学書を自力で読み解く能力を養うことは，今後数学教師として数学に向き合い，生涯にわたって学び続けるために重要であるといえよう．しかし，現在，高等学校では探究型学習が広がりつつあり，そこで求められる活動は，輪読形式ではなく，いわゆる「真正の探究」である．すなわち，テキストに依拠するのではなく，自ら問いを立て，既存の知識や与えられた方法に限定されず，未知の知識をも情報の海から探し出し，自らの解決策を見出すことが求められている．したがって，教員養成の段階で，そのような探究を経験させることは極めて重要であると考えられる．

さらに，そのような探究経験を経た後，大学教員がその場面を振り返り，どのような場面でどのような指導を行ったのか，またその指導にどのような配慮と意図があったのかを説明することにより，学生は教師と学習者の双方の視点から探究を捉えることができる．これにより，探究のファシリテータとしての素養を身につけさせることも可能となるであろう．

本研究プロジェクトにおいては，これまでに真正の探究を志向した教員養成の数学ゼミを，教授人間学理論（以下，ATD）における Study and Research Path（以下，SRP）に依拠し，いくつか実践してきた．本稿の目的は，これまでの実践事例の概要を示すとともに，探究型数学ゼミを展開する際の留意点および，それが今後果たし得る可能性を提示することである．

２．理論的枠組み

本稿は，教授人間学理論において研究者の探究活動をモデル化した SRP の枠組みで実施された教員養成系大学における探究型数学ゼミの実践報告である．

SRP では，最初に設定される問いQ_0の回答を求めて，利用できるものは必要に応じて積極的に用いながら，自らの回答を創り出すことが行われる（cf. シュバラール, 2016; Chevallard, 2019）．Q_0から最終的な回答を創る過程では，いくつもの派生的な問いや，それらに対する部分的な回答が導かれる．問いの生成が重視される探究において，最初の問いQ_0の「よさ」はその生成力，すなわち，そこから派生しうる問いの豊富さによって左右される．ある学問領域に限定されている SRP を「目的付けられた SRP」（cf. Bosch, 2019）と呼ぶが，この SRP においても，その領域内で多様な問いを生み出しうるQ_0の設定が望まれる．

SRP においては利用可能なリソースの積極的な活用が前提とされているが，ATD ではリソースをメディアとミリューに分けて捉える．メディアとは，誰かに何かを教える意図を持つものを指し，書籍やインターネットが典型例である．他にも，授業において範例として提示される模型なども，教師の意図を含んでいるという意味においてメディアとなる．一方，ミリューとは探究者が回答を作り出すために利用するものを指す．例えば，書籍から役に立ちそうな数学的定理を見つけ，それを理解して探究に利用しようとするとき，その定理はミリューとなる．また，授業で提示された模型に対して何らかの数理的な構造を見出そうと働きかけるときには，この模型はミリューとして機能していることになる．このように，メディアとミリューを行き来しながら探究が進む仕組みを「メディア・ミリューの往還」（cf. Chevallard (with Bosch), 2020）という．

３．探究型数学ゼミの事例

(1) 全体的な事例

第 1 著者と最終著者は教員養成系大学に所属する数学者である．2 名の数学者教員がこれまで実践してきた探究型数学ゼミの一部をまとめると表 1 の通りである．2 節以降で各事例を簡単に紹介する．

表１ これまでの探究型数学ゼミの実践

探究テーマ	主な数学的内容
（２）群・グラフ	有限群
（３）将棋の駒多面体	多面体
（４）糸掛けアート	集合論，初等整数論
（５）二分木の数え上げ	カタラン数，組合せ論
（６）フィボナッチ数列の剰余列	初等整数論，数学的帰納法, 行列・行列式，鳩の巣原理
（７）折紙の数学	初等幾何学，二重根号, 複素数平面，二次曲線（放物線）

(2) 群・グラフに関する探究

このテーマのゼミでは代数学での標準的な題材である「群」を，探究的に扱った．通常のゼミであれば「群の定義」から始め，群の具体例を提示し，部分群, 準同型, 部分群による剰余類等についても，同様に定義・例・性質・定理とその証明などを扱うであろう．しかし，このゼミでは全く異なる扱いで群の諸概念を学ばせることを意図した．具体的には，次のような問いQ_0から始める．

数字の書かれたカードの並びを，指定された並び替え操作の繰り返しで，小さい順に並び替えるにはどうすればよいか．

実際に指定した操作のいくつかの例を図 1 に示す．図 1 の一番上の操作の場合でいうと，カードは 4 枚あり，隣り合うカードを入れ替える 3 種の操作 A, B, C のみで並び替えるというパズルになる．

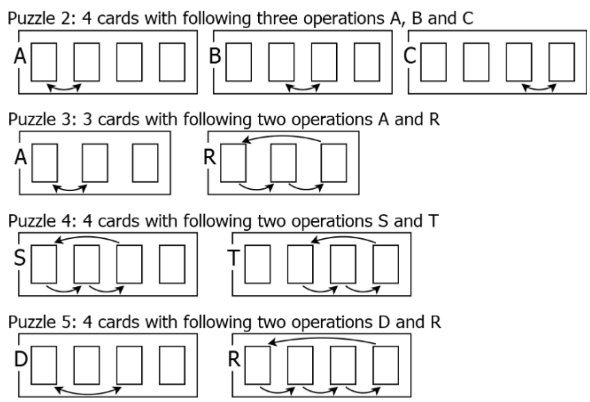


図１ 指定した操作（Hamanaka et al., 2020）

学生たちは，ある順列からどの操作を行うとどのような順列に変化していくのかを，順列を頂点，操作を有向き辺（矢印）とするグラフ（図 2）で表現していく活動から，探究を開始していった．これは，指定された操作（置換）で生成される部分群の Cayley グラフに他ならない．このような活動を通して，学生は自然と群の生成元・部分群・剰余類などの概念に気づいていったのである．むしろ，その概念にラベル（定義と用語）を与えたのは，その気づきの後となる（Hamanaka et al., 2020）．

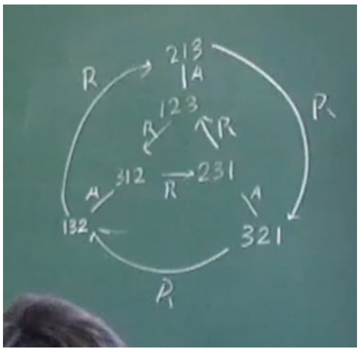


図 2 Puzzle3 の Cayley グラフ

(3) 多面体に関する探究

このゼミでは，一枚の画像（図 3）から探究を開始した．その最初の問いは次のようになる．

Q_0：この多面体はどう構成されているのか？

図 3 問いの起点の多面体

学生は，この多面体が正 8 面体・立方体の頂点を含むことを見出し，そこから，この多面体を構成するにはそれ以外の頂点の座標がどのような性質を持つ必要があるかを探究した．そして，この多面体を含む 1 パラメータの多面体の族を見出し，将棋の駒多面体と呼ばれる各面が合同な線対称五角形で構成される多面体との関係に気づいていった．

さらに，将棋の駒多面体の構成方法を一般化し，図 4 のような類似の性質をもつ一連の多面体の発見に至った（濵中他，2023）．

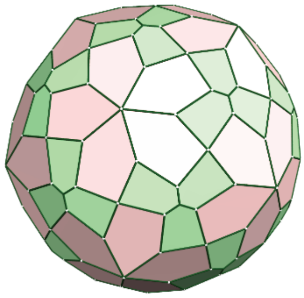


図 4 発見された多面体（濵中他，2023）

この活動では，あらたな多面体を作りたい（実際に紙で工作も行った）という欲求が，学生の探究の牽引力となった．そして，その学習の過程で，空間ベクトル・一次従属性・行列式等に関する数学的知識が，必要性に駆られて学習されていった．

(4) 糸掛けアートに関する探究

糸掛けアートとは，板の上に（主として円周の等分点の場所に）打った釘に，規則的に糸を掛けて得られる工芸作品である．糸掛けアートについて探究したこのゼミは，大きく二つのフェーズに分かれる．

前半は，糸掛けアートの作品を基にして，その仕組みを探る活動であり，最初の問いQ_0は，与えられた糸掛けアートの仕組みは何か，である．ここで提示される糸掛けアート作品の実物は，学生がそこに数学的な構造を見出すことを企図して，すなわち適切な数学的な情報を含むように選んで提示していった．そこで，ここでは糸掛けアート作品そのものをメディアとみなす．前半ではこうした糸掛けアート作品が主たるメディアとなり，動的幾何学ソフト（DGS）をミリューとしながら，主に包絡線に関する知識が学習された（濵中，2023）．

後半は，テーマが幾何的なものから代数的な内容に変わっていった．これは偶然に見つかった複層的な糸掛けアートの原理を発見し，その原理をもとに新たな糸掛けアートを追い求める活動である．この糸掛けアートは平行線の集まりである模様を，複数重ねることで，様々な模様が生じるもので（図 5），後半のQ_0は，この糸掛けの原理は何か，である．後半のゼミにはメディアはあまり存在せず，DGS の結果や自分自身の数学的考察結果をミリューとしながら，掛けられた糸（線分）の集合を扱う独自の数学が展開された．その数学を展開す

るうえで，基礎となり学ばれた数学概念は，集合論（同値類別などを含む）と整数論（不定方程式の解の集合や合同式など）である（Hamanaka & Yoshikawa, 2024）．

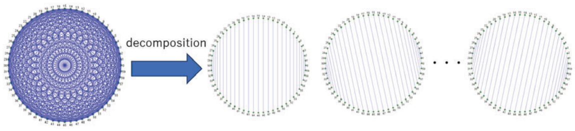


図 5 平行模様に分解される糸掛けアート
（Hamanaka & Yoshikawa, 2024）

いずれも，一つの原理を発見することで，新たな美しい糸掛け作品を考案することができるようになり，また，それを実物で確かめることで，学生は得られた知識の真実性を実感していた．そして，その新しい糸掛け作品がまた新たな問いを生むのである．このように，考察と活動の往還が生じていた．そのことが探究の原動力となり，学生は主体的に数学的考察にいそしみ，その結果を楽しむことができた．

(5) カタラン数に関する探究

このゼミが行われた年度は，前半にコロナ禍の影響もあり，開始当初は遠隔でのゼミを余儀なくされたため，口頭で議論がしやすい数列に関する題材とした．遠隔でのゼミからはじまったこともあって，当初はなかなか探究としての活動を喚起することができず，どうしても教員による誘導が主となることが多かった．つまり，開始当初の内容はまだ探究といえる活動ではなかった．そこで扱っていた内容としては，数列とその母関数に関する活動であった．

2020 年の後期に対面でのゼミが始まり，それまで扱ってきた母関数の知識が活用されることを企図して，二分木の数え上げを扱う探究を開始した．二分木とはトーナメント表のように二つずつに枝分かれしていくツリー構造（図 6）で，一番下の末端を葉という．ここでのQ_0は，葉の数がnの二分木はいくつあるか，であった．実際，その個数はカタラン数と呼ばれる数列を成す．そこで，活動としては，学生が漸化式を見出すことを期待して，$n = 1$から5程度の二分木をすべてカードに書き，葉の個数がn未満の二分木から，葉の個数がnの二分木への対応付けを模索する活動を行わせた（図 7）．教師が問題を設定し，活動も教師の提案であるから，ここまでをみると探究としての性格が弱いように思われるかもしれない．

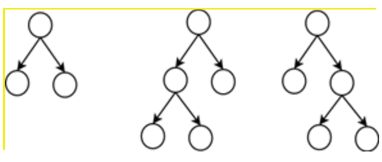


図 6 葉が２個・３個の二分木

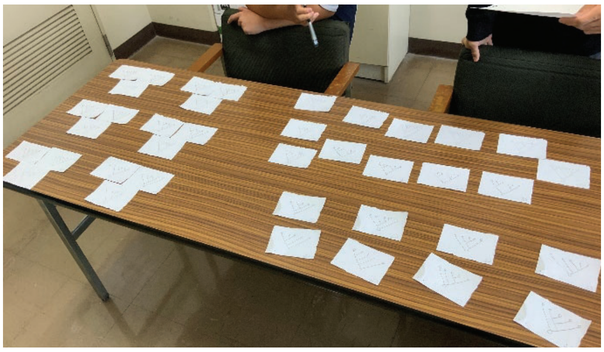


図 7 二分木の対応を模索する活動

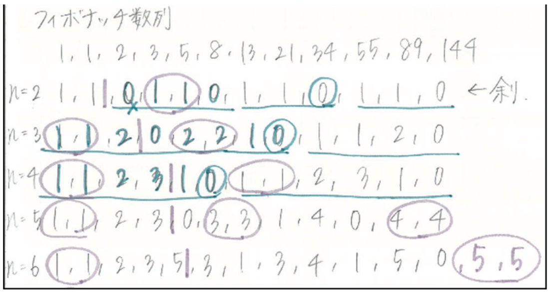
しかし，そこで彼らが見出した対応付けは，教師の意図するものとは全く異なるものであった．通常のゼミであれば，「そうではなくて・・」と軌道修正をしてしまいかねない．しかし，探究としてのゼミでは，それがたとえ実りを結ばないとしても，試してみることに価値がある．このゼミでは，むしろ教師の側が，学生の考えに合わせてゼミの内容の軌道を修正し探究を促していった．そして実際，彼らが見出した関係から，事前には想定されていなかったが，極めて興味深い結果が得られたのである（濵中他，2022）．

(6) フィボナッチ数列の剰余列に関する探究

フィボナッチ数列を 2 以上の自然数で割った余りを項とする数列の性質について，2 名の学生が探究を行った．第 1 筆者はこれまでは輪読型ゼミを行っており，探究型数学ゼミを初めて実践した事例である（詳細は，Hakamata et al.（2024）を参照）．

まず初めに，フィボナッチ数列の性質についての予備的な探究が行われた．その後，「フィボナッチ数列の剰余列にはどのような性質が成り立つか？」をQ_0とする実際の探究が進められた．学生たちは手計算から，割る数nに依らず，剰余列は周期的になるのではないかと予想し，合同算術や鳩の巣原理を復習しながら，それを証明した．この課題から，新しい問い「n で割ったフィボナッチ数列

の剰余列の周期 $\pi(n)$ はどのような性質をもつか」が生じた．学生たちは，Excel や Maxima を用いて，n が 100 程度までの剰余列の周期表を完成した．




```
period(n) := block([a,t],
  a : [1,2],
  t : 1,
  while a#[1,1] do (
    a : [a[2], mod(a[1]+a[2], n)],
    t : t+1
  ),
  t
);
```

```
for i:2 thru 100 do {
  print(i,": ",period(i))
};
2 : 3
3 : 8
4 : 6
5 : 20
6 : 24
7 : 16
```

図 8 フィボナッチ数列の剰余列の周期に関する活動（Hakamata et al., 2024）

学生たちはこの周期表を新たなミリューとして，「$n|m \Rightarrow \pi(n)|\pi(m)$」，「$n \geq 3$ のとき $\pi(n)$ は偶数」などの予想や問いを挙げた．これらの問いの回答は，主にインターネット上の Web サイト（Renault, n.d.）や修士論文（Renault, 1996）をメディアとして参照し，構築された．このとき，学生と教師は，それぞれの予想に対して同じメディアを参照しているが，毎回その問いの回答に関連する部分を最初に読み，必要な事項は遡って読み返している．このようなメディアの読み方は「探究における前進認知的な態度」から生じると考えられる．また，参考文献の一つである学術書には誤った記述がいくつかあり，メディアの信頼性について考える機会となった．

学習された内容としては，初等整数論，行列・行列式，数学的帰納法，鳩の巣原理などが挙げられる．また，参考文献の読み方も学習の対象となった．

(7) 折紙の数学に関する探究

Q_0「与えられた角の三等分を折ることはできるか」から探究が始められた．その後，「折紙に関する数学で何か面白いことはないか」という問いに答える形で探究が進められた．「1 辺の長さの$1/n$の長さを折る方法」，「元の正方形の面積の$1/n$の面積の正方形の折り方」，「正多角形の折り方」をテーマに学習が進んでいった（詳細は，吉川他（2024）を参照）．

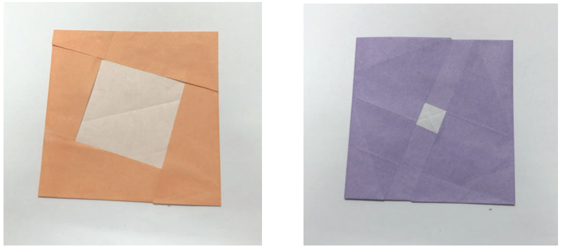


図 9 元の正方形の面積の$1/n$の面積の正方形（吉川他，2024）

「元の正方形の面積の$1/n$の面積の正方形の折り方」の探究では，学生たち自ら新しい問いを提案し，解決していく姿が見られた．ここで，学生たちが自ら問いを提案することができたのは，折紙の視覚的な情報の影響が大きいと考える．また，この過程では，それ以前に脱線的な状況で学習した 4 次方程式の解の公式が利用される場面も起こった．

学習された数学的内容としては，初等幾何学，二重根号，4 次方程式の解の公式（フェラリの方法），複素数平面，二次曲線（放物線）が挙げられる．特に，学生 3 人のうち 2 人は，高校時代に数学 III を履修していなかったため，複素数平面や二次曲線（放物線）は新たに学習された対象であった．

4．考察

これまで実践事例を見てきたが，まず事例を俯瞰して成果といえることをみていこう．

(1) 探究型数学ゼミの題材（Q_0）の可能性

まず扱う内容についてであるが，通常のゼミで扱うような純粋数学的で標準的な内容であっても，工夫をすることで探究をベースとするゼミにすることが可能であった点が挙げられる．群論に関するゼミはもちろんのこと，母関数と漸化式を扱ったカタラン数に関するゼミ，フィボナッチ数列の剰余列に関する内容も，教員養成課程での数学ゼミとしては標準的な内容と言える．しかし，ゼミにおける学生の学習内容に対する態度は，通常のゼミとは異なるものであった．こうした学習において，教師と学習者の間で暗黙の裡に結ばれる，学習活動に関する相互の期待や役割分担のことを教授学的契約と呼ぶが，今回紹介したゼミにおいては，

通常のゼミとは異なる契約が生じていたのである．例えば，通常のゼミでは問いを与えるのは教師とされるが，探究を基本とするゼミでは，必ずしもそうではなく，教師と学生の話し合いの中から，あるいは学生自らが疑問を元に次の問いを提案することは珍しくない．また，その解決方法もカタラン数のゼミで見られたように，教師が想定した方法をなぞるとは限らず，学生が自分たちで見出した方法論や問いに沿って進めるという契約の下に探究が進められていくのである．

一方でもちろん，通常のゼミではあまり扱われないタイプの題材も多い．通常の数学のゼミでは，数学の理論を学ぶ．数学の理論とは，いくつかの概念と定理で構成されることが一般的であろう．こうした理論の起点となる問いは，通常「何故（Why）」の問いが多いように思う．しかし，これまでの実践では，むしろ「どのように（How）」の問いが起点となることが多かった．多面体や糸掛けアートのゼミでは，新たな興味深い多面体や糸掛けアートを理論的に構成し実際に作ること，また，折紙に関するゼミでも何らかの数学的な折り方の追求が，学生の探究の原動力となっている．そして，How の問いが原動力でありながら，それがやがては Why の問いとなり，最終的には数学的な証明を生じさせていくのである．いわば数学外（extra-mathematics）の多様な問いから，数学の探究を生じさせることが可能であることをこれまでの実践は示している．

(2) 探究型数学ゼミの特徴的な展開に関して

次に，こうした探究型数学ゼミの展開の方法について述べる．2 章でも述べたように ATD における SRP では，メディア・ミリューの往還がその基本となる．そのため，まずはメディアの存在が重要である．従来の輪読型のゼミにおけるテキストも，メディアとなり得るかもしれないが，そうしたゼミではテキストはほぼ絶対的存在であり，テキストの内容の真偽を疑うことは稀であろう．また，テキストの内容を理解することが目的となるため，テキストの有用性は確実であり疑われることはない．一方で，SRP におけるメディアは，有用性も真偽も不確実な存在である．むしろ，教授する意図をもたず，有用性から疑ってかけるべき適切なメディアの存在が，探究の促進においては重要な働きを果たす．糸掛けアートにおいては，糸掛けアートの実物がその中に数学的な情報や仕組みのヒントを含んでおりメディアの役割を果たした．またフィボナッチ数列の剰余列では，参考にした学術書が軽微な間違いを含んでいたり，主に利用した修士論文が自分たちにとって必要でない内容を含んでいたり，英語で書かれた文献であったりしたことで探究の促進に極めて有効なメディアとなった．逆に言えば，このような適切なメディアがないと，探究の端緒を得ることができない．そのため，そのような場合には，教員自身がメディアの役割を担う必要があるが，探究の契約を壊さないように教員がメディアとして振る舞うことは，難しい場合も多い[1)]．

また，従来の輪読型ゼミとの違いは，メディアの性質の相違以上に，その後のメディア・ミリューとの往還にある．得られた情報や知識は，自分の知識や手元の計算・実験・シミュレーション等で確かめられ，それを通して真実性の実感と原理の理解を得ながら，それを証明として再構成したり，一般化を得たり，あるいはさらなる問いへと進んでいったりするのである．カタラン数に関するゼミでのカードを使った漸化式の模索や，折紙での折る活動，群論における Cayley グラフの描画，糸掛けアートにおけるコンピュータシミュレーションなど，今回提示した探究型数学ゼミの随所にそのような活動は見ることができた．こうした往還が，学習の動機付けでもあり，同時に理解を促す活動でもあった．つまり，学習を行う活動自体が内発的な報酬となり，主体的な探究を生み出していたのである．

５．おわりに

数学教育における輪読ゼミは，これまで「数学者の学習スタイル」をモデルとして進められてきた．しかし，このアプローチが教師を目指す学生にどのような効果をもたらすかについては，「数学の背景理論を知ることの重要性」という信念に基づいた仮定の範囲を出ていなかったと考えられる（Wu, 2011）．作品訪問パラダイムの観点から，学校教育で扱われる知識は，元来の知識体系から抜粋された断片であると捉えることができる．しかし，背景

理論にあたる知識体系を理解することが，これらの断片を価値づけるための十分条件とはならない．例えば，学校数学に見られる知識の断片が，どのような体系のどの部分に属するのかを特定することですら，容易ではない．

一方で，ゼミ活動において学生に探究を促すことは，「数学者の研究スタイル」をモデルとしたものと解釈できる．この場合，数学者の研究とゼミ内での探究活動には，数学的知識の質や量に差異はあるものの，「未解決の課題に取り組み，未知の知識を習得しつつ，自らの解を導き出す」という活動の同型性が認められる．この観点から，世界探究パラダイムの下では，数学者が専門性を活かして探究を指導しファシリテートすることが，学校教育において必要とされる教師の専門性開発につながる可能性が示唆される．

ゼミのスタイルを刷新することは，確かに挑戦的な試みである．しかし同時に，新たな教授パラダイムにおいて必要な教師の専門性と数学ゼミの内容・方法とを，より整合的なものにするための好機でもある．高度な専門的知識を扱うという意味において，学校数学との間に距離があると見なさる傾向にあった数学ゼミは，世界探究という新しいパラダイムにおける教師教育を考えるにあたっては，中心的な役割を果たし得るものである．

付記

本研究は，JSPS 科研費 JP21H00924 の助成を受けたものである．

注

1)濵中（2024）は，教員が探究の展開について示唆を与える場合に，メディアとして振る舞う（情報の提示）というよりも，探究の往還を促す視点の切り替えを促すという手法を提案している．

引用・参考文献

Bosch, M. (2019). Study and research paths: A model for inquiry. In B. Sirakov, P. N. de Souza, & M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro 2018* (Vol. 3, pp. 4001–4022). World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210

シュバラール, Y.（2016）. 明日の社会における数学指導：来たるべきカウンターパラダイムの弁護（大滝孝治・宮川健訳），上越教育大学数学教育研究，31，73–87.（原著出版 2015 年）

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *12*, 71–114. https://doi.org/10.24529/hjme.1205

Chevallard, Y. (with Bosch, M.) (2020). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (Eds.), *Working with the anthropological theory of the didactic: A comprehensive casebook* (pp. xviii–xxxvii). Routledge.

Hakamata, R., Yoshikawa, M., & Ogawa, T. (2024). Raison d'être of mathematical works and epistemological responsibility in inquiry: The case of the Fibonacci sequence under various moduli. In A. S. González-Martín, G. Gueudet, I. Florensa & N. Lombard (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM2024)* (pp. 301–310). Escola Univeristària Salesiana de Sarrià - Univ. Autònoma de Barcelona and INDRUM.

濵中裕明（2023）．糸掛けアートを用いた数学的探究活動 : SRP に基づく探究過程の事例として．全国数学教育学会誌数学教育学研究，29(2)，31–43．

濵中裕明（2024）．数学における探究型学習のファシリテートに関する一考察：教授人間学理論における探究の往還を視点として．全国数学教育学会誌数学教育学研究，30(2)，31–42．

濵中裕明・岡田莉奈・加藤智大（2022）．カタラン数に関わるある二重数列について．兵庫教育大学研究紀要，60，149–156．

濵中裕明・大久保尚輝・小川星治・谷口琳太郎・高橋忠輝（2023）．将棋の駒多面体について．兵庫教育大学研究紀要，62，83–95．https://doi.org/10.15117/00020325

Hamanaka, H., Otaki, K., & Hakamata, R. (2020). Introducing group theory with its raison d'être for students. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020)* (pp. 328–337). University of Carthage and INDRUM.

Hamanaka, H., & Yoshikawa, M. (2024, July 7–14). *String art as teaching material for set theoretical treatment* [Paper presentation]. The 15th International Congress on Mathematics Education, Sydney, Australia.

Renault, M. (1996). *The Fibonacci sequence under various moduli* [Unpublished master's thesis]. Wake Forest University. Retrieved Feb 14, 2025, from http://webspace.ship.edu/msrenault/fibonacci/fibthesis.pdf

Renault, M. (n.d.). *The Fibonacci Sequence Modulo m*. https://webspace.ship.edu/msrenault/fibonacci/fib.htm (last visited Feb 14, 2025)

吉川昌慶・小川俊彦・袴田綾斗（2024）．探究型数学ゼミにおける教師および学生の活動 :「折紙の数学」を題材とする SRP での役割の推移. 全国数学教育学会第61回研究発表会発表資料.

Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS, 58*(3), 372–384.