教授人間学理論における論証と探究

Proof and Inquiry in the Anthropological Theory of the Didactic

○宮川健[*1]，濱中裕明[*2]，大滝孝治[*3]
MIYAKAWA Takeshi[*1], HAMANAKA Hiroaki[*2], OTAKI Koji[*3]
[*1] 早稲田大学，[*2] 兵庫教育大学，[*3] 北海道教育大学
[*1]Waseda University, [*2]Hyogo University of Teacher Education, [*3]Hokkaido University of Education

［要約］　本研究における主たる問いは，論証もしくは証明がその必要性から‘自然’に発生してくるような探究はどのようなもののだろうか, 探究における論証の位置づけはいかなるものであろうか, といったものである. この問いに答えるため，本稿では，「教授人間学理論」で提起されている「世界探究パラダイム」と呼ばれる指導観に基づいた探究活動における論証もしくは証明の位置づけを検討する. この探究活動は, 問いや疑問を追究し，答えを作り出すために，インターネットや文献など使えるものは何でも用い，必要なものは必要に応じて学習するといった研究者の探究をモデルとするものである．具体的には，ATD の諸概念についての理論的な検討，および探究の具体的事例の検討を通して，探究における論証が，主に，方法を追求する上で既存の回答を理解すること，自らの回答の正しさを他者に示すことに生じうることを示す.

［キーワード］　数学，論証，証明，探究，教授人間学理論，世界探究パラダイム

Ⅰ．はじめに

論証もしくは証明は数学で本質的なものとしばしばみなされ，中学校・高等学校の数学教育で重要視されている．しかしながら，その学習困難性は国内外でよく知られたものとなっている.

一方，数学教育学においては，学習者が数学的な活動の中で問題を解決する必要性から，指導目標となる概念や方法を自ら作り上げていくことができるような教材や状況を見つけることが，これまで一つの研究課題となってきた．例えば，それは「教授学的状況理論」(Brousseau, 1997) では「基本状況 (fundamental situation)」を見いだすことであった．近年，そうした必要性を伴った学習を生じさせる手段として，探究型の学習が注目されている.「教授人間学理論 (Anthropological Theory of the Didactic)」(Chevallard, 2019) では，問いや疑問を追究し，答えを作り出すために，インターネットや文献など使えるものは何でも用い，必要なものは必要に応じて学習するといった研究者の「探究 (inquiry)」が，指導内容の必要性や存在理由を生じさせる一つの条件として提案されている.

そこでのわれわれの疑問は，論証もしくは証明がその必要性から‘自然’に発生してくるような探究はどのようなもののだろうか，探究における論証の位置づけはいかなるものであろうか，といったものである．一般に，何を使っても構わない「探究」では，問題や疑問の解決を優先するため，ともすれば論証がないがしろにされてしまうのではないかとの懸念もある．実際，総合的な学習の時間などで見られる調べ学習では (数学ではないが)，なかなか証明や論証のような場面が少ないように感じる.

そこで本研究では，探究活動における論証もしくは証明の位置づけを明確化することを目的とする. とりわけ，「教授人間学理論」（以下，ATD）で提起されている「世界探究パラダイム」と呼ばれる指導観に基づいた探究活動を研究対象とする．本稿では ATD の諸概念についての理論的な検討および探究の具体的事例の検討を通して，本研究の目的の達成を試みる．なお，ATD における論証や証明を検討するにあたって，そもそも論証と証明が何を意味するのかを明確化する必要がある. しかし, 本稿では「論証」と「証明」という語は特に区別せず，さらにそれぞれを明確に概念規定せずに用いる．今回の検討を通して，ATD における論証や証明がいかなるものかを明らかにしていきたい.

Ⅱ．教授人間学理論における論証の位置づけ

ATD は数学が社会の中で広まっていく過程や仕組みを特徴づける数学教育学の理論であり，これまで多くの概念が作られ，現在では大きな理論体系と

なっている．その中には証明に関連する概念がいくつかあるが（プラクセオロジーや付随数学的対象など），本稿では特に「探究」に直接的に関わるものに限定し，探究と論証の関係についてみていく．

ATD において，「探究 (inquiry)」とは，ある疑問を追究し何かしらの答えを作り出そうとする営みである (Chevallard & Bosch, 2019, p. xxiv)．世界探究パラダイムに基づいた「探究」では，「論証」はいくつかの場所に現れる（宮川・濱中・大滝, 2016）．

まず，探究のテーマによって，そもそも論証が求められることがある．それは，「この命題は正しいのか」といった類の問いの探究であり，「証明活動」ということこの種の探究を指すことは，数学教育研究ではめずらしくない．例えば，「四色問題」のように直観あるいは準経験的に得られた予想命題を証明する探究や，あるいは，ユークリッドの『原論』に見られる数学のように，数学のこれまでの成果をまとめ，より厳密に理論体系を組み立てるといった探究がある．

一方，そうした直接的に命題の正当性を問うような探究でなくとも，得られた知見の真偽の程を判断することがしばしば求められ，そこに論証が現れうる．探究には，インターネットや文献など（「メディア」と呼ばれる）から情報を探索し既存の回答（$A^{◊}$と表記される）を見つけてくる活動が含まれる．そうした$A^{◊}$を探究に役立てるためには，そもそもそれがいかに得られたのか，本当に正しいのか，自らの探究とどのように関わるのか，といった$A^{◊}$に関する問いを追究することが必要となる（$A^{◊}$の分析と評価）．ATD では，$A^{◊}$を得てくる営みとその妥当性や根拠を探る営みを「メディア・ミリューの往還 (dialectic of media and milieu)」という視点で捉え，この往還が探究の中心的な営みと考える．この往還は「推測と証明の往還 (dialectic of conjecture and proof)」とも呼ばれるものであり，Chevallard & Bosch (2019) は以下のように説明する．

> Notwithstanding their plausibility, mostly all the statements “received” by X (including those coming from Y) should be regarded as conjectures, i.e. as statements based on incomplete evidence. Looking for evidence is thus the sinews of inquiry. Proof of a statement ϑ should be looked for by questioning media which, with respect to ϑ, behave like “adidactic” milieus. (Chevallard & Bosch, 2019, p. xxii)

すなわち，探究者がメディアから得たものは不完全なエビデンスに基づいているため，すべて推測とみなされなければならず，きちんとしたエビデンスを見つける営みが探究の源となるとのことである．そして，証明というものがメディアをさらに問うことにより得られるとするのである．

さらに，探究における論証は$A^{◊}$に関するものばかりではない．世界探究パラダイムに基づいた探究では，自らの回答（$A^{♥}$と表記される）を作り出せば活動が終了するのではなく，それを発表することが想定されている．成果を発表するとなると，自分たちの主張のもっともらしさを他の人々に理解可能な形で示さなければならないし，聴衆からの質問やコメントに対してさらに詳しい説明を行う必要もでてくる（$A^{♥}$の擁護と例証）．ここにまた論証が現れうる．ただし，ここでの論証は，$A^{◊}$に関する推測と証明の往還とやや異なり，自らが納得するためというよりも，むしろ他者を説得することを目的とした営みである．

Ⅲ．探究事例における論証

以上の考察からすれば，世界探究パラダイムに基づいた探究では，探究のテーマが論証そのものを求めるものでなくとも，多かれ少なかれ探究が‘自然’に生じそうである．では，実際にどのようなかたちで論証が発生してくるのであろうか．具体例を通して検討する．

1．先行研究における事例

筆者らはこれまで，ATD に示唆される探究を取り入れたさまざまな教授実験を行ってきた．そこでは，論証が生じたものもあれば，あまり生じなかったものもあった（袴田・髙橋・濵中，2020; 根津・葛岡・宮川, 2020）．例えば，電卓でルートキーを使って 3 乗根を求める活動では，電卓での求め方を理解する必要性から，そして新たな求め方（例えば，5 乗根を求める方法）を見つける必要性から，証明を読みその行間を埋めるような活動が生じた（濵中・大滝・宮川, 2016）．これはインターネット上で見つけたテクニックに対してその仕組みを探究するという営みであり，メディアから得られた$A^{◊}$を理解するためになされた論証活動であった．

一方，自らの回答$A^{♥}$を擁護と例証するための論証

活動は，これまでの教授実験ではまだ十分に確認できていない．生徒が学会発表のための準備のような活動をしないため，他者を説得するための論証が十分に生じないのである．これにはさまざまな要因が考えられる．例えば，生徒が研究者の学会発表になじみがないこと，発表があっても他の生徒が質問しないこと（授業中でも同様），授業内だと教授学的契約により発表が教師に向けたものとなってしまうこと，SSH の発表会のような規模の大きなものは通常の授業では難しいこと，などである．

2. 循環小数に関する探究事例

回答 $A^{\heartsuit}$の擁護と例証ではなく，テクニックや既存の回答 $A^{\Diamond}$の検討からどのような論証活動が生じうるのか，別の事例を用いて考察しよう．事例には，教員養成系大学の大学2年生35人程度を対象にした授業（90 分×2 コマ）で行なった，次の循環小数に関わる問い (Chevallard, 2019) についての探究を取り上げる．

「Q_0: 1/371 の小数点以下 200 桁目は何か？」

この問いは，例えば，以下のように因数分解して考えることができるものである．ここでは，学校教育で勉強してきた内容に関する素朴な疑問から，整数論に関する多くの疑問が発生しうるものである．

$371 = 7 \times 53$

$1/7 = 0.142857\ 142857\ 142857\ \ldots$

$1/53 = 0.0188679245283\ 0188679245283\ \ldots$

予想：循環節が $6 \times 13 = 78$ 桁？

授業ではインターネットにつながった PC を用いて二人組で取り組み，最終的な成果はレポートにまとめ後日提出した．受講生はインターネットからさまざまな情報（既存の回答 $A^{\Diamond}$）を得て，探究を進めた．多くの疑問が生じある程度の深まりが見られた．以下に代表的な疑問をあげる．

- 本当に循環するの？（有理数は循環小数であることへの疑念）
- 循環小数のかけ算はどうなるの？
- $1/p$（p: 素数）の循環節は $p-1$ （もしくはその約数）になる？なぜ？
- 循環節の長さがそれぞれ n と m の小数の積の循環節の長さは $n \times m$ になる？なぜ？
- Midy の定理：循環節が偶数の場合 ($a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$), $a_i + a_{i+n} = 9$ $(1 \leq i \leq n)$．なぜ？
- 循環節の規則性が帰納的に見つからないか？（1/2, 1/3, 1/7, …）
- 1/371 を他の分数の和で求められないか．
- 2 進数に変換したらどうなるのか．

これらから論証に関わる疑問がある程度生じていることがわかる．インターネットから正しそうな情報が得られても，「なぜ？」という疑問は‘自然’に生じている．したがって，$A^{\Diamond}$の分析と評価において，$A^{\Diamond}$を理解することが，こうした論証に結びつく問いを生じさせることが確認できる．ここで興味深いのは，最初の問い Q_0 が求答式で答えを求める方法が問題となっており，論証は特に求められていない点である．すなわち，方法の追求を中心とする探究においても，論証活動は必要となるのである．

ただし，こうした疑問は生じたものの，実際の授業では証明に関わる活動は少なかった．上にあげた性質の証明に出会いそれを読むことは生じたものの，よく理解できなかったため大して追究されず，レポートでは多くの学生が計算方法を見つけそれでよしとしてしまった．さらに探究を深められなかった要因は，「あきらめ」であったと思われる．世界探究パラダイムの視点からすれば，探究においては学習者だけで解決できない疑問も少なくないため，教師からのサポートが必要であったのであろう．おそらく，授業の中で大きな疑問を一つ取り上げ，それについて講義することが必要であったのであろう．

Ⅳ. 考察：探究における論証とは

筆者らは，探究における論証は，主に，方法を追求する上で既存の回答 $A^{\Diamond}$を理解すること，自らの回答 $A^{\heartsuit}$の正しさを他者に示すことに生じうるものと考える．このことは，今回の事例で十分に示せていない部分もあるが，今後の教授実験でさらに例証していきたい．一方，先述のように，本稿では証明や論証の概念を規定せずに検討を進めてきた．探究における論証がいかなる性格を持つものか，探究における proof とは何か，という点は議論を要する．メディア・ミリューの往還がなされていればそれで論証活動がなされたことになるのだろうか．$A^{\Diamond}$を理解し納得する営みと $A^{\heartsuit}$の正しさを他者に説得する営みを「論証」もしくは「証明」と捉えてよいのであろうか．この点を考察し，探究における論証の性格をもう少し探ってみよう．

$A^{\Diamond}$を理解し納得する営みと $A^{\heartsuit}$の正しさを他者に

説得する営みといった二つの営みには，さまざまなレベルのものが考えられる．数学においては数学的な証明が求められることは言うまでもないが，他の研究領域（例えば，社会学，文学，自然科学）では，当然ながら数学とは異なる証明 (proof) が求められる．統計に頼った証明が与えられる領域もあれば，複数の事例から帰納的な証明を与える領域もある．さらに一般社会においては，何かしらの問題解決の方法を追求した場合，解決が優先されるため必ずしも厳密性へは進まず，厳密性と効率性は相反するものであるとの主張もある (Balacheff, 1991)．そうであれば，探究を進める領域に応じて異なった厳密性や効率性が存在し，そこで求められる理解や納得，説得の営みも異なったものとなると考える．例えば，教科横断型の探究や現実社会の問題を解決するといった数学的モデル化を含む探究で‘自然’に生じる論証は，中学校や高等学校の数学科で学習対象となっている数学的な証明とは異なる可能性がある．

さらに，たとえ数学における探究であっても，$A^{\diamond}$を理解し納得する営みと $A^{\heartsuit}$の正しさを他者に説得する営みを「論証」と捉えてよいかどうかは疑問である．数学的な証明は，確かにこの二つの営みに含まれるものではあるが，取って代わるとは限らない．実際，数学の研究発表において自らの回答 $A^{\heartsuit}$を他者に示す際には，数学の論文で‘証明’として記述された数学的な証明のみならず，事例をあげることも多い．$A^{\heartsuit}$の例証である．したがって，探究における理解や納得，説得の営みは，通常の数学的証明よりも広く捉えられるものであり，数学教育学の研究でしばしばargumentationと呼ばれる営みをも含むものと考えられる．

V. おわりに

本稿では，教授人間学理論の視点からみた探究における論証や証明の位置づけを整理した．筆者らは，探究における論証は，主に，方法を追求する上で既存の回答 $A^{\diamond}$を理解すること，自らの回答 $A^{\heartsuit}$の正しさを他者に示すことに生じうるものと考える．しかし，探究がいかなる論証を‘自然’に発生させるのかといった点はまだまだ不明瞭である．とりわけ，中学校や高等学校の数学科で学習対象となっているいわゆる証明が探究においていかに必要となるのか，さらなる研究が必要である．

付記・謝辞

本研究は JSPS 科研費 18H01015, 17H02694 の助成を受けている．

文献

Balacheff, N. (1991). The Benefits and Limits of Social Interaction: The Case of Mathematical Proof. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 173-192). Dordrecht: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Trans.). Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 12*, 71-114.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2019). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García, & J. Monaghan (Eds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education. A comprehensive casebook* (pp. xviii-xxxvii). London: Routledge.

袴田綾斗，髙橋聡，濵中裕明 (2020). 世界探究パラダイムに基づく数学的探究の様相―高等学校と大学における SRP の事例分析―. 日本数学教育学会第８回春期研究大会論文集 (pp. 29 - 36).

濱中裕明，大滝孝治，宮川健 (2016). 世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (2) ー電卓を用いた実践を通してー．全国数学教育学会誌数学教育学研究, 22(2), 59-72.

宮川健，濱中裕明，大滝孝治 (2016). 世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (1) ー理論的考察を通してー．全国数学教育学会誌数学教育学研究, 22(2), 25-36.

根津雄一，葛岡賢二，宮川健 (2020). 世界探究パラダイムに基づく教科横断型探究活動の可能性―中等教育段階での授業実践を通して―. 日本数学教育学会第８回春期研究大会論文集 (pp. 37 - 44).