

わが国の数学授業における証明活動の特徴付け

Proof and proving in a Japanese mathematics classroom

○宮川 健^{*1}MIYAKAWA Takeshi^{*1}^{*1} 早稲田大学教育・総合科学学術院^{*1} Waseda University, School of Education

【要約】 本研究の目的は、日本の中学校の数学授業における証明や証明活動の性格を、文化的側面を考慮に入れて探ることである。現在のところ、証明活動を特徴付けるための枠組みとその手法が大きな課題となっており、今回は、実際の授業データを帰納的に分析することにより、どのようなところに文化的な要素が表出するのか、いかにそれを捉えうるのかを検討した。データとして収集した中学校の数学授業においては口頭による証明が多く、記述によるものが少なかった。「日常言語と数学言語」、「話し言葉と書き言葉」といった言語的側面の特徴、および「証明とは何か」という認識論的側面の特徴を詳細に捉える視点もしくは枠組みの必要性が示唆された。

【キーワード】 中学校数学, 証明活動, 文化的側面, 言語的側面, 認識論的側面

I. 背景と目的

国内外の数学教育学研究において、証明学習に関するものはこれまで多くなされてきた。それは、証明を理解し使えるようになることの困難性が日本に限らず国際的な課題であることを示している。一方、数学教育学の研究者により証明とは何かといったことに対する捉え方が異なること (Balacheff, 2008), そもそも日本と他の国では教えられている証明の性格が異なることが指摘されている (Miyakawa, 2017; Sekiguchi, 2002)。証明するという活動 (以下、証明活動) や証明そのものには数学言語のみならず日常言語が用いられるため、それが扱われる国の文化的な影響が少なくない。しかしそうであれば、これまでに海外で得られた研究成果は日本の数学教育に何かしらの示唆を与えてくれるのであろうか。また反対に、日本の研究成果は国際的に意味のあるものなのであろうか。

筆者は、こうした問いに答えるためにはまず、日本の数学教育における証明がいかなるものなのか、その性格を明確化する必要があると考える。証明は日本の中学校・高等学校の数学で扱われているが、そもそもそこでは何が証明と捉えられており、それはどのような仕組みでどのような機能を果たしているのか。こうしたことは必ずしも自明ではない。これまで筆者は、教授学的転置理論の視点から、国定カリキュラムや教科書を分析することにより、「教えるべき数学」としての記述された証明の性格を探り、

日本の場合の特徴を明らかにしてきた (Miyakawa, 2017)。そして研究の次段階として、授業における証明や証明活動を分析することにより「教えられている数学」に見られる証明の性格を明らかにすることを試みたいと考える。ただし、現在のところ、そもそも授業における証明活動をいかに特徴付けるのかという点が大きな課題となっており、そのための明確な理論的枠組みを持ち合わせていない。そこで今回は、実際の授業データを帰納的に分析することにより、どのようなところに文化的な要素が表出するのか、いかにそれを捉えうるのかを検討する。

II. 証明活動の特徴付けについて

1. 証明の文化的側面

証明の性格を探るにあたって、筆者はとりわけ証明の文化的側面に関心をもつ。それは、先に触れたように、証明や証明活動には文化的な要素が強い影響を与えると考えるからである。証明には言語が中心的な役割を果たし、言語はその国の文化に大変固有なものである。一方、今日用いられる数学言語は主に西洋で発達した言語を基にしたものであり、そこには日本語との乖離が見られる (Shinno et al., 2018; Shinno et al., to appear)。その乖離により、日本の授業における証明はいかなる性格をもつものとなっているのであろうか。

さらに、証明するという行為は数学的な主張の妥当性を相手に説得する行為と考えられる。日常にお

ける説得 (argumentation) の延長上に証明を置き、その連続性から証明の指導・学習を検討するという研究も少なくない (e.g. Pedemonte, 2007). しかしながら、日本は説得よりも「話し合い」の文化であり、証明を説得する行為とは捉えにくいとの指摘もある (Sekiguchi & Miyazaki, 2000; Sekiguchi, 2002). そうであれば、証明とは何かという点において、文化的な影響は不可避である。

2. 証明や証明活動の特徴付け

授業データを分析する際の課題の一つは、授業に表出する証明や証明活動をいかに特徴付けるのか、という点である。筆者は、これまでの研究において、「数学的定理」(Mariotti et al., 1997) という概念を用いて、教科書に表出する証明の性格を、数学的定理を構成する「言明」、「証明」、「理論」の三つの要素により特徴付けた。ただし、これらの要素については、授業における証明も教科書に見られる証明もほぼ同様であるため、カリキュラムなどをマクロに議論する際には良いが (宮川ほか, 2015)、授業に固有な証明のミクロな性格をうまく記述してくれない。実際、授業における証明や証明活動では、記述された表現に加え口頭での表現やジェスチャーが用いられ、そこには数学言語のみならず日常言語も用いられる。本研究では、こうした証明の言語的な側面にかかわる特徴をミクロに捉えたい。

一方、授業におけるダイナミックな証明の過程を記述するために argumentation の仕組みを捉えるツールミンモデルを利用するという方法もあろう。このモデルはある主張に対して何が根拠になっているのか、それが授業においていかに発生してきたのかを捉えることは可能であるものの、説得の文脈でなされていない日本の証明活動を特徴付けること、証明活動の文化的側面を捉えることは難しいと考える。

詳細な議論は割愛するが、現在のところ授業における証明を特徴付ける分析枠組みは明確に定まっておらず、分析枠組みを構築することが本研究の課題となっている。そこで本稿では、帰納的にデータを分析し、先行研究で指摘されているさまざまな視点を考慮に入れながら、証明を特徴づける要素を幅広く見ていく。それにより、わが国の授業における証明の性格を明確化するとともに、言語等の文化的な視点から証明を特徴付ける分析枠組みを検討する。

III. 授業のデータ

1. データ収集

地方の中都市の市街地に位置する公立中学校の第2学年でデータを収集した。1学年あたり4,5クラスの規模の中学校であった。授業は、第2学年図形領域「平行四辺形になるための条件」についての全5時間からなる小单元である。証明を学習したあとの小单元であり、多くの証明活動が期待される。20年ほどの教師経験をもつ数学教師に特別な授業ではなく普段通りの授業を2週間にわたって実施してもらい、その様子をビデオカメラ2台で録画した。時期は2013年2月である。

2. 授業の概要

- 全5時間の授業内容はおよそ以下の通りである。
- 1 時間目：作図により四角形が平行四辺形になるために使われる要素 (平行, 辺の長さ, 角の大きさ) を見つける活動。
 - 2 時間目：教師が準備した36個の条件において、与えられた性質を持つ四角形が平行四辺形になるかどうか判断する活動。グループ学習。
 - 3 時間目：全てのグループの結果を模造紙に示し、36個の条件の真偽をひとつずつ証明。
 - 4 時間目：5つの重要な条件を提示したあと、教科書の例題を証明。
 - 5 時間目：教科書の問いを証明。

IV. 授業の分析

1. 証明活動における特徴的な点

全5時間の授業を通して、至る所で証明に関わる活動が見られた。まず、特徴的だと思われる点を取り上げる。

第一に特徴的な点は、証明する活動の多くが口頭でなされた点である。5時間を通して証明が板書されたのは、4時間目と5時間目にそれぞれ一度のみであった。一方、全5時間を通すと、命題が真であることの証明は記述されたものも含め全部で12回、偽であることを反例により示した証明は5回あった。

第二に、図やジェスチャーが証明活動に多く用いられていた点である。それは、口頭による証明のみならず、記述での証明を板書する際も同様であった。

第三に、口頭での説明は口語でなされることが多かった。その際、「辺AB」などのようにラベルを用いることが少なく、省略が多かった。ところが、記

述の証明を板書する際には、こうしたラベルが口頭で用いられていた。したがって、ラベルは記述のためのものであり口頭の証明のためのものではないようである。

第四に、先行研究でも指摘されていたことだが、証明活動は命題が真であることを「説得」するというよりは、すでに存在するものを説明するというようなスタンスで進められていた点は特徴的であった。

次に、3 時間目に見られた教師による口頭での証明と、4 時間目に見られた記述の証明を事例として取り上げ、特徴的な点をさらに見ていく。

2. 口頭での証明の事例

3 時間目の授業では、36 個の与えられた性質の真偽を一つずつ確認していく中で、「2 組の対辺がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である」の証明が教師により与えられた。この証明は2 時間目で既に口頭で生徒とのやり取りの中で証明されたものである。今回は復習であったことから、教師が再度口頭で証明を示した。教師の口頭による証明は以下のようであった（発話記録の括弧内は筆者が加えたもの）。

4:30 教師：見ていてくださいね。はい。えー、[対角線を] 引っ張ると、はい、三角形が2 つできる。1 組の辺が等しい、2 組目、等しい、3 組目、重なっているやつが等しいから合同。合同だからこの角とこの角が等しい、ね、はい、合同だからこの角とこの角が等しい。はい、次です。この角とこの角、等しいから、これ、ゼットができて錯角、平行。はい、ね、平行、はい。えー、ここここ、角度が等しいからゼットができて、はい、錯角、等しい。で、あ、もうごちゃごちゃして分からなくなりましたが、はい、ね、平行四辺形、言えますよと。ね、言えるんですよね。はい。

この教師の説明は黒板の図とそこでのジェスチャーによりなされた。詳細な分析は割愛するが、上述の証明活動における特徴的な点がうかがわれる。

3. 記述での証明の事例

4 時間目の授業では実際に証明が板書された（図 1）。問題は、「右の図のように、平行四辺形 ABCD の対角線 AC 上に、 $AE = CF$ となるように 2 点 E, F をとるとき、四角形 EBF D は平行四辺形であることを証明しなさい」（一松ほか, 2012, p. 144）というものであった。授業では、教師が五つの主要な条件を

板書して示したのち、教師と生徒とのやりとりの中から証明するといったものであった。具体的には、教師がまず図を順々にかいていき、生徒もそれにしたがってノートに図をかき、そして教師は、結論に至るために必要な性質を生徒らに問うといった後ろ向きの推論により証明を構成する。そのうち証明の記述に移り、図 1 の証明が板書された。

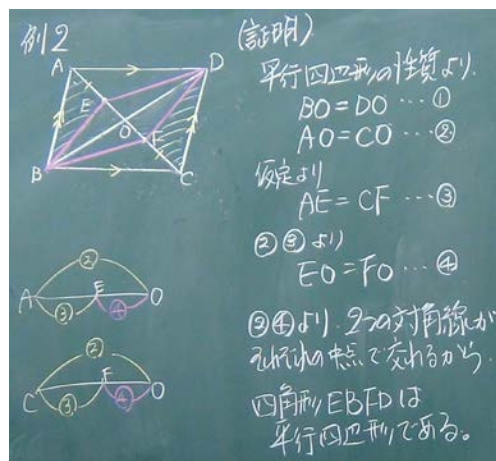


図 1 板書された記述での証明

ここで特徴的な点は、証明を口頭で構成しそれが証明そのものように捉えられていることである。実際、教師は証明を板書する際、「28:48 教師：今、言ったことを、えっと、書いていきます」と証明（図 1 の右半分）を書き始める。すなわち、口頭で証明はすでに終了しているが、それを書いたらどうなるのかというスタンスが垣間見られる。

V. 考察

今回の授業分析を通して、証明活動を特徴付ける際に考慮に入れるべき側面は、少なくとも、「言語的側面」と「認識論的側面」であると考えた。前者は、授業で表出する異なった形態の言語を捉える必要性を示唆するものであり、これまでの議論からしても、今回の授業での実際の証明活動を見ても、わが国を始め諸外国の証明活動を文化的な視点から特徴付ける際に必要不可欠である。後者については、「証明とは何か」といった証明の捉え方を明確化する必要性を示唆するものである。これはこれまでの議論で度々指摘されているものであるが、この証明の捉え方をいかに特徴付けるか検討する必要性を今回の授業から改めて感じた。そこで以下では、この二側面をいかに特徴付けることが可能か考察し、今後の研究の方向性を示したい。

1. 言語的側面

今回の授業における証明活動に用いられた言語は、日常言語と数学言語、話し言葉と書き言葉、さらに図とジェスチャーである。とりわけ話し言葉による証明活動が多く、日常言語が主に用いられた。数学言語は、主に記述の際に出てきた。話し言葉や図・ジェスチャーが多いことから、言語的な形態としては、相手を説得する営みである *argumentation* と類似した活動と捉えられうる。

一方、Sekiguchi & Miyazaki (2000) が指摘しているように、わが国は「説得」というよりも「話し合い」の文化である。今回の授業においても、命題が正しいことを相手に説得するといった営みではなかった。

こうしたことから、言語的側面をうまく特徴付けることは必要ではあるものの、同時に、説得や説明などの証明活動の機能を特徴付ける必要がある（そうでなければ *argumentation* と差異化できない）。例えば、Duval (1991) による認識値 (*epistemic value*) と論理値 (*logical value*) の概念を用いた特徴付けは有効であろう (*argumentation* は認識値を上げる営み、わが国の証明活動は論理値を「真」にする営み)。

2. 認識論的側面

授業では何をもって「証明した」もしくは「証明された」と判断されるのだろうか。前述のように、今回の授業では、証明のテキストが黒板やノートに書かれたことではなく、口頭で図を用いて説明したことにより、「証明した」と判断されていた。すなわち、証明は記述された「テキスト」とは限らない。今回の授業では、仮定から結論へ至る証明の演繹構造をどんな形であれ示すことにより「証明した」とされていた。実際、教師の板書による証明は、試験等では記述が求められるため、すでに口頭で一度示した演繹構造をいかに記述で説明するのかということを指導していたと捉えられる。

以上のことから、演繹構造は証明を構成する非常に重要な要素であることがわかるとともに、その性質さらには演繹構造とそれを表現する言語との関係をより詳細に捉える枠組みの必要性が示唆される。

VI. おわりに

以上、本稿では、簡単にだが、実際の授業のデータから証明活動をいかに特徴付けることが可能であるのか検討してきた。今回の考察からは、とりわけ、

言語的側面および認識論的側面の特徴を詳細に捉える枠組みの必要性が示唆された。

付記・謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP18H01015 の助成を受けている。

参考文献

- Balacheff, N. (2008): The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, 40(3), 501-512.
- Duval, R. (1991): Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233-261.
- Mariotti, M. A., Bartolini, M, Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997): Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the IGPME* (Vol. 1, pp. 180-195). Lathi: PME.
- Miyakawa, T. (2017): Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: the cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, 94 (1), 37-54.
- Pedemonte, B. (2007): How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.
- Sekiguchi, Y. (2002): Mathematical proof, argumentation, and classroom communication: from a cultural perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 21, 11-20.
- Sekiguchi, Y. & Miyazaki, M. (2000): Argumentation and mathematical proof in Japan. *The Proof Newsletter*.
- Shinno, Y., Miyakawa, T., Iwasaki, H., Kunimune, S., Mizoguchi, T., Ishii, T., & Abe, Y. (2018): Challenges in curriculum development for mathematical proof in secondary school: cultural dimensions to be considered. *For the learning of mathematics*, 38 (1), 26-30.
- Shinno, Y., Miyakawa, T., Mizoguchi, T., Hamanaka, H., & Kunimune, S. (to appear): Some Linguistic Issues on the Teaching of Mathematical Proof. *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*.
- 一松ほか (2012) : 中学校数学 2. 学校図書.