第 7 章

科学としての数学教育学

7.1　はじめに

上越教育大学のような教員養成系大学の学部では，教師として最低限必要となる素養を身に付けることが目標になっています．数学教師になろうと思えば，解析・代数・幾何などといった数学の内容に加え，**数学教育**について勉強します．そこでは，わが国の学校数学において，どのようなことが指導目標となっており，いかなる内容をいかなる方法で指導していくのかといったことを学習するとともに，教育実習等の実地研修を通して実際の指導技法を習得します．皆さんもこうした経験を積んできたことでしょう．

大学院に入ると，学習する内容の一つに**数学教育学**というものが出てきます．学部では「数学教育」だったわけですが，大学院では「学」という接尾辞がついています．「学」がつくとずいぶん立派な感じがします．では，「数学教育学」とはどのようなものか．「数学教育」とは異なったものなのでしょうか．大学院では，修士論文を書くために研究をしなければなりません．数学教育についての研究が「数学教育学」なのでしょうか．そうだとしても，そもそも数学教育についての研究とはどのようなものなのでしょうか．本章では，この問いに対する一つの回答を，ややフランスの数学教育学研究よりの立場から与えることを目標とします．

7.2 数学教育学の目的

7.2.1 科学的な研究領域

「数学教育学とは何か」という問いに対し，「子どもの人間形成のために，どういった数学をどのように教えるべきかを追及する学問である」などという回答を見聞きすることがあります．確かに，数学教育の改善のためにはこうした追究が大事です．そしておそらく，古代ギリシャ以前より遠い昔に人間が数を数え始めた頃から，数学についての知識や技能を伝達するという営み（数学教育）があり，そこでは何をどう教えるかといった思索が，多かれ少なかれなされてきたことでしょう．

一方，私が日々進めている「科学としての数学教育学」はもっと新しい学問で，その視点からすれば，上の回答が述べる学問は，数学教育学の研究というよりもむしろ数学教育の実践や開発，もしくは数学教育そのもののように思われます．その理由は，一般に，自然科学や社会科学などの科学的な研究領域は，**研究対象の理解を目的**とし，どのようにすれば良いのかということは，科学というよりも開発もしくは実践の課題だからです．

今日科学とみなされている研究領域の事例から科学的な学問の性格を見てみましょう．物理学とりわけ古典力学は，物体の動きなどを研究対象とする自然科学の一分野です．そこでは，物体がなぜそのように動くのか，その仕組みを明らかにしようとします．例えば，リンゴは落ちますが月は落ちません．どうしてなのでしょう．不思議です．科学はそのような疑問に答えることを主たる目的とします．一方，ボールをより遠くに投げるためはどうすべきか，という疑問も考えられます．古典力学は，この疑問に対しヒントを与えてくれます．どの方向にどのような初速度で投げればどこまでボールが飛んでいくのか，理論的に計算できます．しかしながら，この疑問自体は理解を目的としたものではなく，方法の開発を目的とした実践的な疑問であるた

め，物理学の直接の研究対象ではありません[*1]．実際，採るべき方法は，その場の様々なものの影響を受けるため，経験的な要素などを考慮に入れ決定されます．科学的な研究は，あくまでも，どのような条件の下ではどのようなことが起きるという，限られた条件下での予見を示すにとどまり，絶対的に適切な方法を示してくれるわけではありません．現実にどうすべきかは，当事者の経験に基づいて決定されるのです．

もう一つ別の領域で考えてみましょう．経済学は，人間社会におけるお金のやり取り，すなわち経済活動を研究対象とする社会科学の一分野です．経済活動には，国々の間でなされる貿易から個人の消費活動まで含まれます．例えば，私が，スーパーに行って何を買うべきか，どのように買えば得になるのか考え，何かしらの結論を出し，レジでお金を支払ったとします．するとこれは，立派な経済活動です．しかし，私自身は経済学者でも何でもなく，何をどのように買うべきかという問いに答えは導き出しているものの（ときには数学を使って！），この行為は経済学の研究とは言えないでしょう．経済学はむしろ，私がなぜそのような経済活動を行なったのか，その仕組みを明らかにするものです．何を買うべきかを考えることは，経済活動の実践であり経済学そのものではないのです．

科学としての数学教育学に関しても同様です．どのような数学をどのように教えるべきかを検討するのではなく，数学の指導や学習がいかに生じるのか，**数学教育の営みの仕組みを理解することを目的**とするのが「科学としての数学教育学」なのです．経済活動が経済学とは異なることと同様に，数学教育の営みは数学教育学とは異なるのです．一般に，自然界の物事の仕組みを理解することを目的とする科学は自然科学と呼ばれ，人間社会の物事の場合は社会科学と呼ばれます．数学教育が人間社会の営みであることからすれ

[*1] むしろ工学の研究対象です．工学が科学か否かは議論のあるところです．

ば，数学教育学は社会科学の一分野とみなすことができるでしょう [*2].

なお，ここでの「科学としての」という枕詞は，研究方法に関するものではなく，研究目的に関するものです．すなわち，数学を用いて現象をモデル化できたり，統計を用いてある現象の確からしさをより数学的に判断できたりするから「科学」と考えているのではありません．何を目的とするのかといった学問の大前提に応じて，科学なのか実践なのか区別しています．紙面の都合上，述べることができませんが，もちろん研究方法がより科学的であることも大事で，多くの検討が必要とされるところです．

7.2.2　研究者のことばから見た目的

科学としての数学教育学が数学教育の営みの理解を主たる目的とすると述べてきました．これまで，様々な研究者がこの目的を異なった仕方で表現しています．そのいくつかをここで紹介し，数学教育学の目的がどのようなものか，より具体的に見ていきたいと思います．

まず，フランスのギ・ブルソー氏 (Guy Brousseau) のことばです．ブルソー氏は，科学としての数学教育学の父とでもいえる研究者で，数学教育学の研究がいかにして科学となれるのか検討し，一つの研究領域を作ってきま

[*2] こうしたスタンスとは異なり，教育学が「どうすべきか」を考察する規範的な学問として捉えられることも少なくありません．色々な立場のあるところですが，私は，数学教育の規範的な議論は，科学としての数学教育学研究の範疇のものではなく，科学としての研究の成果と当事者の経験と思想にもとづき展開される議論であるという立場をとっています．科学は特定の条件がそろえばあることが生じるという予見を可能にしますが，その帰結を生じさせるべきかどうかは個人の思想によるのです．ただし，この立場は，私が規範的なことを考えないということは意味しません．私は研究者であると同時に，教員養成を担う教育者です．教育者としては，「こう教えるべきだ」，「こう教えたほうがよかった」など，私の経験と思想にもとづき規範的な議論を展開しています．また，補足ですが，「どういうものか」と「どうすべきか」の関係は，ドイツ語で「〜である」を意味する sein と「〜すべき」を意味する sollen の語を用いて，わが国の教育関係領域に限らず，法学や倫理学など，様々なところで話題になります．そうした中で，「である」から合理的な推論によって「すべき」が導き出せないという「ヒュームの法則 (Is-ought problem)」という有名な主張があります．私も，この主張に賛成で，「である」から「すべき」の導出は，科学的な研究により可能になるものではなく，そして科学的な研究の課題でもないと考えています．

した．氏によれば，数学教育学とは次のようなものです．

> 「人間社会が機能するために有用な数学的知識の広がりに固有な条件についての科学」(Brousseau, 1994, p. 52)

このことばをやや丁寧に見ていきましょう．まず，「数学的知識の広がり」という語が用いられています．この語は，主に，数学を教えたり伝えたりする営み，すなわち数学教育を意味するものです．実際，数学教育とは，一部の人たちが持っている数学という知識・技能を，それを持っていない人たちへ広げる営みです．小学校・中学校・高等学校などの学校教育における数学教育は，数学を広げる営みの中心を担っています．ただし，この営みは学校教育に留まりません．大学・大学院における数学教育，塾やカルチャーセンターにおける数学の授業や講座，博物館における数学に関わる展示，数学に関わるテレビ番組・啓蒙書なども数学を広げることを担っています．したがって，**数学教育学は，学校教育に限らず，より広い意味での数学の広がりを研究対象とする**のです．

次に，「条件」という語も使われています．この語は，これまで述べてきた「営みを理解する」ことの意味を示唆しています．例えば，数学の授業における，数学的知識の広がり（すなわち学習）を考えてみましょう．あるときはスムースに広がり，あるときはなかなか広がりません．数学教育学の研究は，数学がスムースに広がればそれで満足というわけではありません（数学教育の実践ではそれで十分です）．その際，なぜそうした広がりが生じたのか，どのような条件がそろえばそれが生じるのかを明らかにし，科学としての知識体系を構築しようとします．この**条件を見つけることが，数学の広がりの仕組み・カラクリを解明すること**なのです．また，このことはスムースな広がりに限らず，なかなか広がらなかった場合においても同様です．なぜ数学の広がりが生じないのか，その条件を追究するのです．ただし，探究する条件は数学の広がりに固有なものです．そこに数学教育学の固有性があります．この点については，次節以降でより詳細に見ていきます．

ブルソー氏のことばに関して，最後にもう一言．ブルソー氏は「有用な」

という言葉を用いています．科学としての数学教育学が「どうすべきか」という規範的な議論を範疇に入れないとなると，ものごとの価値からも独立して研究を進めると考えられがちです．しかしそれは必ずしも正しくありません．研究方法論に関わるところで，数学教育の営みをより客観的に分析するためには，研究対象から研究者自身をうまく切り離すことが重要になります．ただし，より客観的な立場から研究を進めることは，必ずしも研究者が価値から独立して研究を進めることではありません．社会科学では，研究者が何らかの役に立つであろうと考える**価値のある対象を研究し価値のある理論を構築**します．それが上の「有用な」という表現になっています．

ブルソー氏のことばの解説が長くなってしまいました．その他は簡単に見ていきましょう．以下にフランスの 3 名の研究者のことばを引用します．いずれもこれまでに述べてきたことを反映しているのではないでしょうか．

> 「われわれの目的は，数学の教授・学習にかかわる現象・過程についての知識の基本体系を構築することである」 (Balacheff, 1990)

このことばから，われわれの目的が，よい授業を作ったり，よいカリキュラムを作ることではないことがわかります．数学教育の改善を最終目標にはしていますが，そのために，やや回り道になるかもしれませんが，数学の広がりについての**知識の基本体系** をコツコツと構築していくのです．

> 「一般に論理的言説よりもより経験主義的態度や見解を招きやすい教育の現象を，合理的な方法で描写し説明することは可能である」 (Bessot, 2003)

数学教育学はこのような前提のもとで進められています．教育という営みについては，確かに，誰もが一家言もっています．それは，誰もが学校教育などの教育を受けてきた経験があり，誰もが会社での教育や子育てという教育などに少なからず携わるからです．そのため，自らの経験に基づいて教育がしばしば語られます．そうしたものをより科学的な方法で扱おう，扱うことができる，という前提をわれわれは持っているのです．

「社会的現実は，法則もしくは法則のようなものの決定に支配されている」(Chevallard, 1992)

「社会的現実」という聞きなれない表現が使われています．社会的現実とは，数学の指導・学習など，数学の広がりを意味します．後で詳しく述べますが，この表現は，数学教育学には社会学との強い結びつきがあることを示しています．いまここで注目したい点は，社会的現実ではなく「法則」です．上のことばは，われわれが何を発見すればよいのかを教えてくれます．教育は複雑な営み（社会的現実）です．それをコントロールする法則を見つけることはなかなか難しいかもしれません．しかし，自然も非常に複雑な営みです．人類は長い時間をかけて，そこに法則を見つけてきました．数学教育学も，時間がかかるとは思いますが，そうした法則を見つけることができる，と考えるのです．

7.3　数学関連領域における位置づけ

ここまで数学教育学の研究対象（数学の広がり）とその対象との関わり方について述べてきました．次に，この研究領域を数学との関わりという視点から見ていきたいと思います．数学教育学は，数学の広がりに固有な条件を探求します．数学に関わらない指導と学習の現象は研究対象外です．数学は数学教育学において中心的な存在なのです．そうであれば，数学教育学と数学はどのような関係にあるのでしょうか．また，一概に数学と言っても，それに関わる営みは複数ありそうです．そもそも数学とはどのような営みなのでしょうか．そこで以下では，数学に関する営みにはどのようなものがあるのかをまず明らかにし，その上で，数学教育学が数学に関わる他の営みとどのように関わっているのか，数学関連領域における位置づけを示したいと思います．

まず，数学に関するもっとも代表的な営みは，**数学を創り出す営み**と考えます．数学は，古代ギリシャ，いやもっと前から長い時間をかけて人間が創

り上げてきたものです．この第一の営みは，言うまでもなく数学者の仕事です．もしかすると，数学はもうできあがった学問であり，さらなる発展はない，と考えている方もいるかもしれません．しかし，そのようなことはありません．未解決の問題や課題は山のようにあり（新たなものも次から次へと出てきます），数学者は現在も新たな数学を創り出しています．

二つ目に，**数学を使う営み**が考えられます．数学は数学者により創り上げられるだけではなく，様々な場面で利用されます．日常生活における金銭の勘定をはじめ，モノづくりの技術者の仕事，物理学や経済学など自然科学や社会科学の研究領域，銀行や保険関係の仕事などです．そこでは，何らかの目的を達成するために数学が利用され，数学は道具の役割を果たします．この役割は，数学の存在意義の一つにもなっています．

三つ目に，**数学を広める営み**が考えられます．これもよく知られた数学に関わる営みでしょう．前述のように広めるとは，数学の指導を中心とするものです．小・中・高校・大学における算数・数学教育，塾や家庭教師，カルチャーセンター，科学博物館など，先ほど述べたとおりです．この第三の営みは，数学を創り出すわけでも，何かの目的を達するために数学を利用するわけでもなく，第一，第二の営みとはやや異なった営みと捉えられます．

以上の三つが，皆さんがしばしば見たり聞いたり実践したりすることのある，数学に関わる主たる営みではないでしょうか．これ以外にもう一つ大事な営みがあります．それは，**数学に関する営みを理解する営み**です．これは，第一から第三の 3 つの営みがどのようなものか理解する，といったややメタ [*3] な営みです．数学史家や数理哲学者の仕事が，この第四の営みになります．数学史家は数学を創り出すという第一の営みを振り返り，数学がいかに発展してきたのか，その歴史を明らかにします [*4]．数理哲学者や数学の科学哲学者は，これもまた数学を創り出す第一の営みを分析し，数学とはそ

[*3] メタとは，接頭語で「超えた」などを意味し，物事の渦中ではなく，それを超えたところからその物事を捉えるようなものです．「メタデータ」とは，データを分類するためのカテゴリーなど，データについてのデータを意味します．教育関連でしばしば出てくる「メタ認知」とは，自らの頭の働きを外から制御する自らの頭の働きを意味します．

[*4] カジョリの『初等数学史』とボイヤーの『数学の歴史』などを参照のこと．

もそも何なのか，ということや，数学はいかに創り出され発展するのか，その条件は何かといったことの解明に努めます [*5]．数学史家や数理哲学者は，数学の発展を知るために，場合によっては第二と第三の数学の営みを分析することもあるでしょう．

私は，以上の四つの営みが数学に関する主たる営みと考えます．では，数学教育学はどこに位置づけられるのでしょうか．もうお分かりかもしれませんが，数学教育学は，数学が広がるという第三の営みを研究対象とし，数学がいかにして広がるのか，その仕組みを明らかにしようとします．数学史や数理哲学と同様，メタな視点から数学に関わる営みです．したがって，**数学教育学は第四の営み**に位置するのです．第一の営みをメタな視点から捉えるのが数学史や数理哲学であり，第三の営みをメタな視点から捉えるのが数学教育学なのです．さらに，数学教育学の研究では，数学の学習という第三の営みを理解するために，数学がいかに創り上げられるのか，ある数学的知識はそもそもどのようなものなのかなど，数学史や数理哲学の問いが生じることがしばしばあります．このことも，数学教育学が第四の営みであり，数学史や数理哲学に近い研究領域であることを示しています．

また，ここで大事なことは，数学を教えるという数学教育の営み（第三の営み）と，数学教育を研究するという数学教育学の営み（第四の営み）が，数学との関わりという視点からすれば，カテゴリーまでもが変わってしまうということです．前節で，数学教育と数学教育学との違いについて述べましたが，数学に関する四つの営みという視点からすれば，両者の距離は，数学教育学と数理哲学との距離よりも大きいのです．

7.4　数学教育学の様々な研究

数学教育学は，数学の広がりを研究対象とします．一概に数学の広がりといってもその営みは多様です．解析・代数・幾何など領域に応じて見えてく

[*5] ラカトシュ (1980), デービス・ヘルシュ (1986), ジュスティ (1999) などを参照のこと．

る数学の広がりの現象（例えば困難性）は異なることが予想されます．さらに，カリキュラム，授業，教材など，様々な研究対象が考えられます．ここでは，そうした多様な研究を捉える視点を導入し，どのような研究があるのか，少し整理したいと思います．

7.4.1　ミクロとマクロ

数学の広がりは，経済学と同様に，「ミクロ」と「マクロ」の語を用いて，異なったスケールで捉えることが可能です [*6]．経済学には，個人の消費などの経済活動を研究対象とする「ミクロ経済学」[*7]，と国全体や世界規模の経済活動を研究対象とする「マクロ経済学」[*8] という領域があります．数学教育学の場合は，教室内での教師と学習者の活動・営み（すなわち指導・学習）は，ミクロなスケールでの数学の広がりと捉えられます．学習者がなぜある特定の解答を与えるのか，どのような困難性があるのかなど，学習過程を詳細に分析し，数学が広がるための条件とそれを妨げる制約を明らかにするような研究は，**ミクロな研究**と呼ばれます．

一方，わが国では学習指導要領により学校数学における指導内容が国として定められています．そしてそれは，わが国における数学の広がりに大変大きな影響を与えます．そのため，よりグローバルなレベルでの数学の広がりの機能の仕方を研究対象とすることがしばしばあります．例えば，ある国の教育課程や国定カリキュラムの数学の内容がいかに作り上げられているのか，いかなる数学を広げようとしているのか，その仕組みを明らかにするような研究です．こうした研究は，先ほどのミクロな研究と比べるとずいぶん分析のスケールが大きくなるため，**マクロな研究**と呼ばれます．

ミクロとマクロの視点は，研究を進める上で必ずしも常に意識しているものではありませんが，私たちの研究対象の捉え方をより明確にしてくれま

[*6] cf. Brousseau (2001)　[*7] 「家計の消費活動や企業の生産活動など個別経済主体の活動の分析を通じて，経済全体の分析に至る経済学.」（広辞苑第六版）　[*8] 「一国全体としての投資や消費などの集計概念を用いて経済活動を分析する経済学.」（広辞苑第六版）

す．また，ミクロとマクロそれぞれの研究領域は完全に独立しているとも限りません．研究によっては，マクロなレベルの分析から，教室におけるミクロなレベルでの学習者の困難性の要因を解明するものもあれば，逆に，ミクロなところからマクロな研究へといったものも考えられます．

7.4.2　事実と現象

数学教育学の目的のところで，科学としての研究が，「何を教えるべきか」「いかに教えるべきか」という規範の追究を目的とするのではなく，数学教育の営みがいかなるものか理解することが目的だと述べました．このように述べると，数学教育学というのは，記述的な研究であり，数学教育に関する営みをこと細かく記述することを目的としている，と思われるかもしれません．この捉え方は，完全に間違っているとは言えませんが，正しいとも言えません．実は，数学教育学の研究では，一般的には，二種類の性格の異なる対象があり，両者が明らかにすべき対象とされます．

一つは，われわれの現実世界において経験的 (empirical) に認められる数学の広がりに関わる「**事実 (fact)**」もしくは「事象」です．例えば，学習者が図形領域の証明ができないといったこと，学習者がある問題をどのように解決するのかといったこと，他国ではどのような数学をどのように教えているのかといったこと，などが事実にあたります．OECD/PISA や TIMSS などの国際機関や国の実施している様々な調査，教科書についての調査研究なども，事実を見つけようとする研究と捉えられます．こうした研究は，「実態把握 (fact finding) の研究」と呼ばれることもあります．しかし，事実を特定しようとする研究は，常にこうした大きな調査であるとは限りません．学習者の問題解決過程や授業での営みをより詳細に観察し，どのような考えや行為が見られるのか明らかにしようとする研究も事実の発見を目的とした研究です．例えば，エスノメソドロジーなどと呼ばれる社会学から入ってきた方法論を用いた研究では，授業などの研究対象の中に入り込み，そこで起きていることを細かく記述します．

数学教育学研究が発見すべきもう一つの対象は，「**現象 (phenomenon)**」と呼ばれるものです [*9]．現象とは，**特定の理論によって事実の背後に認められる理論的な構成物**です．それは，現実世界ではなく抽象的な理論世界に存在します．再度，古典力学を例にすると，「リンゴが落ちる」ということは，古くから知られている事実です．物理学者は，この事実の背後に自由落下運動という現象を認めます．自由落下運動が現象とされるのは，それが，古典力学という理論の範疇で構成されたものだからです．理論がなければ現象もありません．古典力学の理論により，なぜリンゴが落ちるのかという事実が生じる仕組みを，一つの現象として，他の事実（例えば，月は落ちない）と併せて統一的に説明できるようになったのです．

数学教育の営みについても同様に考えます．数学教育学の理論によって，数学の広がりに関わる事実の背後に認められる理論的な構成物が**数学教育学現象**なのです．科学としての数学教育学においては，事実よりも現象を発見することが主たる研究課題となります．学習者が，ある問題について，ある過程を経て不適切な解答に至ったとします．これは一つの事実です．この事実がなぜ起きたのか，その仕組みを明らかにするということは，その事実をこと細かに記述することではなく，学習者の行為の背後にある法則（現象）を発見することなのです．**理論は，事実の集まりではなく，その仕組みについての仮説（法則）の集まりから構成**されます [*10]．知らなかった事実を特定することは，現象を見つけるために大変有用です．しかし，事実をいくら積み重ねても必ずしも現象の発見にはつながりません．それはリンゴが落ちるという事実が古くから知られていたにも拘らず，自由落下運動という現象が発見されたのがさほど昔ではないことからも明らかでしょう．一方で，数学教育学の法則や理論の妥当性は，実験的 (empirical) なデータ，すなわち事実によって検証されるということも留意しておく必要があります．事実は，それだけでは現象に結びつきませんが，現象を発見するためには不可欠なものなのです．これが，先ほど間違ってはいないが正しいとも言えないと

[*9] cf. Chevallard (1989b), Margolinas(1998) [*10] このことは，数学教育学に限らず物理学や経済学などの研究領域でも同様です．

述べた理由です．すなわち，数学教育学研究では，事実を特定し記述することは大事ではありますが，さらに大事なのは現象（法則）の発見なのです．

事実と現象のイメージを図 7.1 に示しました [*11]．数学の広がりの営みという事実が現実世界に存在し，その仕組みについての仮説から構成される理論とそれにより認められる現象は理論世界に存在するのです．理論世界には理論から導かれるモデルをひとつ示しました．これは教授学的状況理論 [*12] のもので，現実世界の数学学習の営みの仕組みを示したものです．

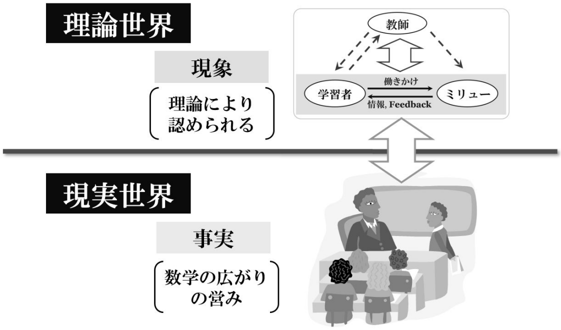

図 7.1　事実と現象のイメージ

7.4.3　理解と開発

一般に，現実世界の数学教育の営みでは，カリキュラム，教材，授業などの開発が多くなされます．カリキュラムであれば，指導する内容を始め，「数学的な考え方」や「数学的活動」など，数学学習において何が大事なのか導き出し，カリキュラムを開発していきます．授業であれば，学校現場の授業研究などでしばしばなされているように，特定の指導内容をいかに教え

*11　この事実と現象の捉え方は，必ずしもすべての学問領域に共通するとは限りません．現象を事実も含めて広く捉える立場もあるようです． *12　本章では，教授学的状況理論や教授人間学理論など，いくつかの理論について言及します．詳細には触れませんので，これらについては宮川 (2011) などを参照してください．

るか，時間をかけてアイデアを練り，学習者がより主体的に数学的な知識を創っていけるような授業を開発します．

こうした開発自体は，これまで何度も述べているように，科学としての数学教育学研究の目的とするところではありません．数学教育の改善のための開発に資することができるように，まずは数学教育の営みを理解することが目的です．しかし，数学教育学研究は開発を伴わないわけではありません．むしろ開発は頻繁に行なわれています．

例えば，ブルソー氏による教授学的状況理論は非常に理論的で理解するのが難しいものですが，この理論は，「教授工学 (didactic engineering)」と呼ばれる方法論にもとづき，多くの開発とその実践の上に構築されてきました．ブルソー氏は，実験のための学校までを作り，自ら開発した数多くの教材を幾度となく実験してきました．そしてそこで開発された教材は，どれも子どもが自ら数学的な知識を創っていくという主体的な学習を促すもので，今日の実践にも使えるようなものです．しかし，ブルソー氏の目的は開発そのものではなく，数学の広がりのための条件を見つけることでした．開発により新たな仕組みの発見に努めてきたのです [*13]．

数学教育学の研究を進めるにあたって開発をしばしば伴う理由は，前節で触れた数学教育の事実が研究を進める上で非常に重要な役割を果たすことにあります．この事実は，**データ**と呼ばれます．私たちは，数学教育学現象の解明を目指しており，数学教育の事実・データが仮説的な現象の妥当性を検証してくれます．先の教授工学では，実験のために開発された教材や授業に，数学教育学現象についての仮説が埋め込まれています．すなわち，仮説に基づいて開発が進められるのです．そして，実験によりその仮説が検証されます．この実験は，開発を目的とする実験とはやや異なります．開発を目的とすれば，ある教材や授業がそれなりに上手くいけばそれで満足です．ところが，理解を目的とする実験では，仮説を検証し，さらに授業で見られた事実が，良し悪しではなく，なぜ生じたのか，なぜ別のことが生じなかった

[*13] 自然科学など他の研究領域においても，こうした方法論はしばしば見られます．

のか，その仕組みを明らかにしようとします．具体例がないため，イメージしづらいかもしれません．仮説は，例えば，卑近なものでは，「情報の非対称性（片方の人が知っていて片方の人が知らない状態）が情報の伝達（言語活動）を生じさせる」などといったものです *14．

このように，数学教育学研究は，数学教育の事実（データ）を利用して現象を明らかにしようとするのです．一方，数学教育学研究で扱われるデータは様々です．どのような事実をデータとして収集するかは，研究によって異なります．上述のように研究者が仮説を埋め込み開発した教材や授業の実験により得られたデータはその一つです．これは，研究者の介入によって現実世界に作られた事実からなるものです．観察することにより得られるデータもあります．これは，数学の広がりに関して現実世界に存在する事実を収集してきたもので，研究者の介入のないものです *15．例えば，ある学校の通常の数学の授業を観察し収集したデータはこれに相当します．また，これらは授業等のミクロな研究に関するデータですが，カリキュラムや指導内容などマクロな研究では，学習指導要領や教科書，指導書，指導内容を決定する委員会の資料などの事実がデータとなります *16．さらに，今日の事実に限らず，過去の事実がデータとなることもしばしばあります．

7.4.4　歴史研究

数学教育学と教育学の関連については次節で述べますが，わが国の教育学の研究では，教育史の研究が少なくありません．数学教育関連の研究においても，数学教育史というものがあります．

歴史学は，一般的に，過去の事実や出来事について研究する領域であり，

*14　石川・宮川 (2012) では，片方のペアが自分たちのもっている図形（相手ペアは見れない）のかき方を考え，それを相手ペアに手紙で伝えるような活動にそうした仮説を埋め込み，実験しています．　*15　医学などの臨床研究分野では，介入の有無で，介入研究と観察研究とに区別されることがあります．　*16　教科書の作成では研究者が執筆者となっており，研究者が介入しているように思えますが，これは介入に相当しません．執筆者は，肩書が研究者であるだけであり，数学教育の営みを理解するために教科書を書いているわけではなく，純粋な開発を目的としているからです．

過去に起きた事実，及び事実間の関係を解明することを目的とします．研究対象となる歴史は多様で，時代（古代史，現代史）や地域（日本史，世界史），人間の特定の営み（数学史，教育史，政治史，美術史）などにより領域を区分することができます．研究の内容は，数学史であれば，数学がどのように発展してきたのか，その変遷を明らかにしたり，ある時代における数学がどのようなものであったのか，局所的に検討したりします．

数学教育史が数学教育の過去の事実や出来事を明らかにすることを目的するのであれば，それは歴史学の一分野と捉えられます．では，数学教育史は科学としての数学教育学とどのような関係にあるのでしょうか．両者はまったく別の研究領域なのでしょうか．以下では，歴史研究という視点から，科学としての数学教育学の位置づけを見てみたいと思います．

数学教育史と数学教育学の関係を検討するに当たり，まず，7.3 で述べた「数学に関わる 4 つの営み」の視点を用います．7.3 では，数学史が第一の営み（数学を創る営み）を研究対象とする第四の営み（数学の営みを理解する営み）であると述べました．数学教育史の場合も同様に考えれば，数学教育史は第三の営み（数学を広げる営み）を研究対象とする**第四の営み**と捉えられます．すなわち，数学とのかかわりという視点からすれば，数学史や数理哲学，数学教育学と同様の営みに位置づけられるのです．

では，第四の営みとして同じ分類に入る数学教育学と数学教育史はお互いにどのような関係になっているのでしょうか．両者の相違点・共通点はどこにあるのでしょうか．このことについては，7.4.2 で述べた「事実と現象」の視点によりうまいこと説明がつきます．事実と現象の視点からすれば，数学教育史は過去の事実及びその関係を解明する研究領域です．あくまでも現実世界の事実（出来事）の記述を目的としています．一方，科学としての数学教育学は，先述のように，事実の発見もその一部ではありますが，仮説的な現象の発見が主たる目的です．すなわち，事実よりも現象を中心的な目標とします．この数学教育史と数学教育学の違いは，数学史と数理哲学の相違にぴったりと合います．数学史は数学に関わる過去の事実を追究し，数理哲学は数学がいかに発展するのか，その仕組みについての現象を追究します．同

様に，**数学教育史は数学の広がりに関わる過去の事実を追究**し，科学としての数学教育学は数学がいかに広がるのかその仕組みについての現象を追究します．

以上のことからすれば，7.4.2 で触れた現在の事実や実態を明らかにしようとする数学教育学の研究は，過去と現在という違いはあるものの，数学教育史と同じ性格の研究領域であると言えます．実際，数学教育学現象を解明するためには，今日の事実のみならず，数学教育史で特定された過去の事実が大きな役割を果たします．例えば，私は，数学史の専門家と明治以降の中等数学教育の幾何領域における証明の変遷について共同研究を進めています (Cousin & Miyakawa, 2017)．そこでの私の関心は，日本を事例に，ある国の指導内容（幾何の証明）の性格がどのような仕組みで形作られるのか，といった数学教育学現象を解明することです [*17]．この研究を進めるに当たり，数学教育史の事実は，現象についての多くの仮説を示唆してくれるとともに，研究者が立てた仮説を検証する実験的 (empirical) なデータともなってくれるのです．

7.5　その他の研究領域との関係

数学教育学は，数学を始め，教育学や心理学など様々なその他の研究領域と関連します．数学とのかかわりについては既に述べました．ここでは，それ以外の領域で関連の深い教育学，心理学，社会学との関係を見ていきたいと思います．ただし，弁解で恐縮ですが，私の専門はあくまでも数学教育学であり，これらの関連領域についての知識は乏しいです．間違い等がありましたら，ご指摘いただけると幸いです．

[*17] 歴史家である共同研究者は，数学が特定の国（日本）においていかに発展していくのか，という数学史への関心に基づき数学教科書の分析を進めています．

7.5.1　教育学

数学教育学は，わが国では一般に，「教科教育学」と呼ばれる領域の一分野として捉えられることが多いです．そしてさらに，教科教育学は「教育学」の一分野とされることがあります．そうであれば，数学教育学は教育学の一分野ということとなり，教育学の影響を大いに受けるのであろうことが想像されます．では，数学教育学は教育学とどのような関係にあるのでしょうか．このことを検討するにあたって，そもそも「教育学」がどのような研究分野なのか，まず見ていきましょう．

教育学について調べると，教育関係の営みを研究対象とするとのことです．このことはよくわかります．ところが，その実態はあまり明瞭ではありません．例えば，ウィキペディアでは「教育学」について以下のような記述があります．

> 「教育学は，基本的には，よりよく生きることのできる人間を育成する活動という研究対象によって定義され，研究方法によって定義される学問ではない．（中略）ときに個の「学」としての堅牢さが不十分であるとか，学問のアイデンティティーが未完成であるとかという指摘を受けることがある．」（ウィキペディア「教育学」, 2016/12/7 アクセス）

この引用は，内容の信憑性に疑問のあることもあるウィキペディアからの引用ですので鵜呑みにはできませんが，わが国の教育学関連の学術専門領域を見ると，あながち間違っているともいえないように思います．例えば，教育学には，教育社会学，教育心理学，教育哲学，教育史といった研究分野があります．これらは，研究対象が教育に関するものではありますが，目標や手法から判断すれば，それぞれはむしろ社会学，心理学，哲学，歴史学の一分野のように思われます．

教育学は，その研究対象としての事実は明確です．教育にかかわる営み・

事実はすべて研究対象となりえます．この視点からすれば，数学教育学は数学の広がりという教育の営みを研究対象とするということから，教育学の一分野であるといえます．ところが，研究においてどのような現象を明らかにするのかという，目標となる現象の視点からすれば，教育学は，ときには心理学現象，ときには社会学現象と，明確な目標が定まっておらず，その固有性に乏しいことは否めません．目標とそのための研究方法を定めるのがむしろ他の研究領域になっているというのが教育学の現状のように思われます．

こうしたことから，数学教育学と教育学との関係を考えようとすると，研究対象以外については，教育学よりもむしろ心理学や社会学などとの関係を明確にする必要が出てきます．そこで，以下では，心理学及び社会学との関係で，数学教育学の固有性について見ていきたいと思います．

7.5.2　心理学

数学教育は，古くから心理学と強いつながりがあります．1960 年頃の数学教育の現代化運動と呼ばれる世界的な数学教育の改革には，ピアジェをはじめとする心理学者の研究成果が大きな影響を与えました．また，1976 年に設立された PME と呼ばれる，数学教育学の領域で国際的にもっとも大きな学術団体があります．この団体の正確な名称は International Group for the Psychology of Mathematics Education であり，日本語では「国際数学教育心理学会」などと訳されます．上で教育学が固有性に乏しいと述べましたが，数学教育学も，それが心理学の一分野であるかのように思えます．

では，数学教育学は心理学と実際にどのようなかかわりにあるのでしょうか．この問いに対する私の回答は，「数学教育学の研究スタンスや国によって異なる」というものです．大陸ヨーロッパとりわけフランスの数学教育学研究の影響を受けている私の研究スタンスでは，数学教育学と心理学の違いはある程度明瞭です．実際，数学が広がるための条件を探究する科学と人間の心を探究する科学とではずいぶん違いがありそうです．このことについてまず説明しましょう．

両者の違いは次のシュバラール氏のことばからよくわかります．

> 「心理学者は迷路の中のネズミの行動を研究します．しかし，心理学者はその迷路を自分自身で作ったため，その構造を知っています．教育学者 (didacticien) は，反対に，生徒が放たれる迷路の構造を知らないのです．そのためまず，論理的にそれを探索することに努めなければなりません．心理学者の視点をひっくり返したこうしたことのために，迷路の中での「ネズミ」（生徒！）の行動をも観察するでしょう．迷路の構造をそこから導き出すために．」(Chevallard, 1989a)

今日の心理学の研究がこのような迷路を使っているとは思いませんが，この迷路のメタファは心理学者と数学教育学者それぞれの解明すべき対象の違いをよく表しています．迷路を教室に置き換えて考えてみてください．心理学者の解明すべきブラックボックスが学習者の頭や心の中であるのに対し，数学教育学者のブラックボックスは，むしろ学習者の行動を引き起こす周りの構造なのです [*18]．換言すれば，心理学が探究する心理学現象は個人（もしくは集団）の頭や心の働きについてのものであり，数学教育学が探究する**数学教育学現象は学習者を含む場や状況の働きについてのもの**と言えるでしょう．何度も出てきた「リンゴが落ちる」という事実を用いれば，心理学はリンゴの中の構造を解明しようとし，数学教育学はリンゴを含むその場の構造（運動法則）を解明しようとする，と言えるのではないでしょうか．具体的には，ブルソー氏の構築してきた教授学的状況理論であれば，周りの構造というのは「状況 (situations)」と呼ばれるもので，シュバラール氏による教授人間学理論であれば，それは “institution” と呼ばれる社会の構造です．以上のことから，数学教育学が心理学とはずいぶん異なった研究領域であることがわかるでしょう．

一方，国際的な視野から数学教育学の研究を見渡すと，学習者や教師など

[*18] 教室における学習者の周りの環境は目に見えるため，それをブラックボックスとすることには違和感があるかもしれません．しかし，事実が目に見えることと事実の仕組みを理解することは異なります．リンゴが落ちるという事実を考えてみてください．

の個人の中身，その構造を知ろうとする研究も結構あります．例えば，メタ認知の研究は，心理学的な研究とみなせるでしょう．私の印象では，英語圏における数学教育学研究は心理学的なものが少なくなく，そして歴史的には，1980, 90 年代ごろまでは世界的にも心理学的な研究が多かったように思われます．そしてその傾向は徐々に薄まってきたようにも感じます．上で触れた PME では，今日，心理学の手法を用いた研究は必ずしも多くなく，教科書分析など，個人がほとんど表れない研究も学会の範疇になっています．実際，今日の学会の目的に「心理学」の語が入ってはいますが，その扱いは中心的ではありません [*19]．さらに，90 年代より幾度と PME の名称変更についても議論されてきました．その理由は，学会の名称が研究内容にそぐわなくなってきたためです．しかし，今日も結局その名称を継承しています．PME という名称が長く慣れ親しんできたものであるためのようです．

7.5.3　社会学

「社会科学 (social science)」が人間社会の物事の仕組みを理解することを目的とする研究領域であり，数学教育の営みも人間社会の物事の一つであるため，数学教育学が社会科学の一分野であることは最初の方で述べました．社会科学には経済学や法学など様々な分野があり，その一つに「社会学 (sociology)」という分野があります．この社会学も心理学と同様，数学教育学と強いつながりがあります．数学教育学の歴史を振り返ると，国際的には，1990 年あたりから社会学的な視点が数学教育学の研究にしばしば採り入れられるようになってきたように思います [*20]．

社会学は，社会科学と名称が似ているため混同しそうですが，両者の違いは，社会科学がそれだけで独立した一つの研究領域ではなく，社会的な営みを研究対象とする複数の研究分野の総称と考えると，わかりやすいです．物理学や化学，生物学などが，すべて自然科学であるものの，自然科学が独立

[*19] http://www.igpme.org/index.php/organization　[*20] フランスでは，シュバラール氏の研究など，より早い時期から社会学的な視点が取り入れられてきました．

した一つの研究領域ではないことと同様です．

ところが，社会学とはどんな学問なのかと問われれば，その説明は容易ではありません．それは，私が社会学の専門家でないということもありますが，研究対象が非常に広く，個人や集団の行動を始め，社会の構造やその変動など，多種多様なものが研究対象となっているからです．教育もその一つです（教育社会学という分野があります）．

誤解を恐れずに述べれば，社会学は，社会的なものの個人や集団の思考や行為への影響など，社会の構造や変動，そこにおける様々な営みの仕組みを解明することを目的とした研究領域です．ここでの社会とは，一般的に，日本社会や地域社会など，やや広めのものが想定されることが多いように思います．

では，数学教育学と社会学はどのような関係にあるのでしょうか．教室が学習者と教師からなる一つの社会を構成していると考えれば，そこに見られる数学教育のミクロな営みは，社会学的な研究対象になりうるでしょう [*21]．心理学との対比を示した前節で，数学教育学が個人の内的な構造ではなく，その場の構造を明らかにしようとすると述べました．この場の構造は，一つの社会構造と言えます．

さらに，数学教育学のマクロな研究においては，国や学校というレベルで，数学の広がりがいかになされるのか，その仕組みの解明に努めます．これは，まさに社会的なものの数学教育への影響を研究対象とするものであり，社会学の研究対象に合致します．実際，既に触れたシュバラール氏による教授人間学理論は，数学教育のマクロな営みに焦点を当て，「教授学的転置 (didactic transposition)」と呼ばれる社会学で特定された現象を発展させることにより構築されてきました [*22]．

本章で何度も出てきた事実と現象という視点からすれば，研究対象とする事実としての数学教育の営みは社会的なものであり，解明すべき構造や現象

[*21] 教室内における学習者間のやり取りや関係は「社会的相互作用 (social interaction)」などと呼ばれ，数学教育学の研究対象となっています． [*22] 教授学的転置については，宮川 (2011) を参照のこと．

も社会的なものです．この二点からすれば，数学教育学は社会学の一分野と捉えられます．しかしながら，われわれが数学教育学の研究を進めるにあたり，社会学の文献を読むことは少なく，社会学の研究を行なっているという意識はほとんどありません．では，数学教育学と社会学を区別するものは何でしょうか．

私の考えでは，それは理論です．社会学において社会学現象を説明するための様々な理論が構築されてきました．数学教育学においても，数学教育学現象を説明する理論がこれまで数多く構築されてきました．現象が事実の背後に認められる理論的な構成物であることから，事実の背後に特定される現象は理論に応じて異なります [*23]．この理論の性格が数学教育学と社会学では大きく異なるのです．数学教育学の理論は，数学的知識の広がりに固有のものであり，それはミクロとマクロを問わず，**数学的知識の性格を追究した結果構築された理論**です．理論を構築する際の焦点が，社会学を始め他の領域とずいぶん異なるのです．私がこれまでに進めてきた幾何領域における証明の指導内容（カリキュラム）に関する研究 (Miyakawa, 2017) を例にすれば，この研究においてまず必要となる理論は，「証明とはなにか」や「幾何とは何か」という問いに答えてくれる理論です．このような理論を構築し，これらの問いに答えた上で，数学の教科書等に見られる証明がどのような性質もっているのか探っていきます．この数学そのものを追究するということが，数学教育学に固有の理論を生み出し，他の関連する研究領域から明確に区別される自立した研究領域を作り上げているのです．

7.6　おわりに

本章では，「科学としての数学教育学」とはどのような研究領域なのか様々な視点から検討してきました．とりわけ，数学の広がりの仕組みの理解，数

[*23] あまり良い例ではないのですが，アリストテレスによる運動理論の視点からすれば，リンゴが落ちるという事実の背後に，ものが本来の場所に戻ろうとする「自然運動」という現象が特定されます．一方，古典力学では「自由落下運動」です．

学教育学現象の解明といった基礎的な関心が，その研究の中心にあることを指摘しました．この捉え方は，基本的にフランスを中心とする数学教授学 (didactics of mathematics) をベースとしたものではありますが，国際的な視点からの捉え方とさほど異なるものではないと考えています．1980 年代より数学教育学研究の国際化が進み，この研究領域がいかにして科学的な研究領域となりうるのか，多くの検討がなされてきました．今日においても，数学教育学研究の捉え方は国によって異なるところはありますが，数学教育の改善と発展のために，数学教育の営みを理解する必要があるということは，国際的にも共有されているように思われます [*24]．

最後に，本章では，研究の具体的な事例を載せたいと思っていたのですが，紙面の都合上できませんでした．実際の研究，理論，研究方法などの事例については，大学院の講義「数学教育学基礎論」を受講するなり，その他の文献にあたっていただければ幸いです．

第 7 章の参考文献

[1] Balacheff, N. (1990). Towards a problematique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 258-272.

[2] Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, No. 91, 1-28.

[3] Brousseau, G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot (Eds.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.51-66). La Pensée Sauvage: Grenoble.

[4] Brousseau, G. (2001). L'insegnamento della matematica nella scuola

[*24] わが国の数学教育学研究は実践とのつながりが強く，何をどう教えるのかといった実践的な課題が重視されることが多いです．理解を目的とした研究もありますが，仕組み（現象）ではなく事実の記述にとどまっているものが少なくありません．

dell'obbligo: Micro e Macro-Didattica. *la matematica et la sua didattica*, 15 (1), 4-30. (Translation: "L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : micro et macro-didactique", retrieved from http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_macro_03.pdf)

[5] Chevallard, Y. (1989a). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officile. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, IMAG, Grenoble.

[6] Chevallard, Y. (1989b). On didactic transposition theory: some introductory notes. In *Proceedings of International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education* (pp. 51-62), Bratislava.

[7] Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13(2/3), 215-230.

[8] Cousin, M. & Miyakawa, T. (2017). Evolution of proof form in Japanese geometry textbooks. In *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education.*

[9] Margolinas, C. (1998). Relations between the theoretical field and the practical field in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 351-356). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[10] Miyakawa, T. (2017). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: the cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics*, 94 (1), 37-54.

[11] 石川実，宮川健 (2012). 「「手続きの説明」の学習における伝言ゲームの可能性 〜中学校図形領域における教授実験を通して〜」. 日本数学教育学会誌数学教育, Vol. 94, No. 11, 2-11.

[12] ジュスティ, E. (1999). 『数はどこから来たのか：数学の対象の本性に

関する仮説』(斎藤憲訳)，共立出版.

[13] デービス, P.J., ヘルシュ, R. (1986). 『数学的経験』(柴垣和三雄ほか訳)，森北出版.

[14] ラカトシュ，I. (1980).『数学的発見の論理：証明と論駁』(佐々木力訳)，共立出版.

[15] 宮川健 (2011). 「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格 〜わが国における「学」としての数学教育研究をめざして〜」. 日本数学教育学会誌数学教育学論究，Vol. 94, 37-68.