

インターネットを用いた探究を通じた論証指導 －問いを始点にした単元間をつなぐ数学的活動の事例－

Teaching Proof through Inquiries using the Internet:
An example of mathematical activities linking units and domains

宮川健 濱中裕明
上越教育大学大学院 兵庫教育大学大学院

要 約

本稿の目的は、中等教育全体を通じた論証指導カリキュラム開発にあたって、指導をデザインする際の原理となりうる数学的活動の事例を提示し、カリキュラム開発の具体的な方針を得ることである。ここでの数学的活動は、何らかの問題を解決するために自らの必要性から論証に取り組むような活動であり、単元や領域間をつなぐような活動である。具体的には、インターネットメディアの存在を前提とした、「問い」を始点とする探究的要素をより多く含むオープンな活動、教授人間学理論(ATD)の範疇で“世界探究パラダイム”に基づいた“Study and Research Paths (SRP)”と呼ばれる一連の活動を取り上げる。このSRPに関する理論的考察・事例による考察を通して、本プロジェクトの成果へのフィードバックを与えつつ、今後のカリキュラム開発への示唆を述べたい。

キーワード：教授人間学理論，世界探究パラダイム，証明，カリキュラム開発

1. はじめに

筆者らは、中等教育における将来の数学教育の在り方、とりわけ論証指導の在り方を探るプロジェクトに参画している。本プロジェクトは、中学校のみならず高等学校をも含めたカリキュラムを抜本的に問い直し、中等教育全体を見通した新たな論証指導カリキュラムの開発を目的とする。これまで、論証を捉える理論的基盤を整備し、論証指導の「内容」と「水準」を明らかにするなど(宮川ほか、

2015)、種々の研究を進めてきた^[1]。本プロジェクトの特徴的な点は、“数学的活動”に基づく論証指導カリキュラムの開発を目指している点である。これは、論証が学習者のいかなる営みを通して指導されるのか、その方法を規定するものである。

中学校図形領域を中心とした論証指導では、以前より今日に至るまで、論証の意義や必要性が学習者に十分に感得されていないことがしばしば指摘されてきた(例えば、国宗, 1987;

文部科学省, 2010). この要因は, 小学校より既知の図形性質をわざわざ証明する必要性が明確でないこと (たとえ教師にとっては体系化が目的であったとしても), 合同条件を用いた決まりきった手続きが繰り返されること, など様々であろう. 本プロジェクトでは, こうした形骸化したような論証活動ではなく, 何らかの問題を解決するために自らの必要性から論証に取り組むような数学的活動を通して, 学習者が数学の核心ともいえるべき論証を学ぶことができる方法, カリキュラムの開発を目指すのである. ここでの数学的活動は, 必ずしもわが国の学習指導要領で提唱されているものとは一致しない. 数学的活動は授業・単元・カリキュラムと異なったレベルで考えられるものであり, 本プロジェクトでは特に, 単元間や領域間をネットワーク化するような活動を想定している (溝口, 2015). そして, その活動の実際の性格は本研究プロジェクトにより明らかにすべきものとする.

そこで本稿では, 論証指導をデザインする際の原理の一つとなりうる数学的活動の具体例として, 学習者が自らの必要性から論証活動に取り組むような活動を提示し, それをもとに中等教育全体を見通した論証指導のカリキュラム開発に向けて具体的な方針を検討したい. 数学的活動の具体例は, 結論からいえば, それは題目にあるインターネットを用いた探究活動であり, 特に「世界探究パラダイム」という考えに基づいた SRP と呼ばれる一連の活動である.

以下では, 本稿で提示する探究活動の理論的背景についてまず述べ (2 節), SRP がいかなる論証活動を可能とするのか, これまでの研究で得られた成果を簡単に示す (3 節). そして SRP の考えに基づきデザインし実施したインターネットを用いた探究の実践事例を紹介し (4 節), この実践事例をもとに, カリキュラム開発に向けた具体的な方針を検討する (5 節).

2. 理論的背景

本稿で具体例を提示する数学的活動は, シュバラール氏による「教授人間学理論」(以下, ATD) の範疇で「世界探究パラダイム」(Chevallard, 2015) という考えに基づいた探究活動であり, より正確には「研究と調査の経路 (Study and Research Paths)」(以下, SRP) と呼ばれるものである. 以下, その理論的背景とともに想定される探究活動の仕組みについて概略を述べる. 詳細については宮川・濱中・大滝 (2016)を参照されたい.

(1) 記念碑主義 v. s. 世界探究

教授人間学理論 (ATD) では, 「何を学習すべきか—何が教授争点 O になりうるのか—, そして何がその争点を学習する形態となるのかを暗黙裡に規定する規則の集まり」(Chevallard, 2015, p. 174)のことを「教授パラダイム (didactic paradigm)」と呼ぶ. そして今日の中教育の数学において中心的な‘古い’パラダイムを「記念碑主義 (monumentalism)」もしくは「作品訪問 (visiting works)」, それにとって代わる‘新しい’パラダイムを「世界探究 (questioning the world)」と呼び, それぞれがいかなる性格をもつのか ATD の視座から特徴づける.

「記念碑主義」は, 過去の複数の偉人の作り上げた作品をそれだけで意味をなす小さな部分に細分化し, それらを順々に学習していくという考えのパラダイムである. 小さな部分は, 例えば, ピタゴラスの定理, ユークリッドの互除法などといったように, 各々がモニュメントや記念碑のようなものとして, 授業では, 教師と生徒がそれらを次から次へと一つずつ見物に訪ねてまわる. 知識が細分化されるため, 知識の存在理由は消えてしまい, 「なぜこれが生じたのか?」「何の役に立つのか?」といった問いはほとんど扱われない. それでも, 生徒らはそれらを称賛し楽しむことが期待されるのである. そしてこの帰結は, 「習ったすべての知識は, 試験が終われば当

然のように忘れ去られる」という、シュバール氏が“ゴミ箱の原理”と呼ぶものである。記念碑主義は、今日、フランスに限らず、どこの国でも見られるものであろう。

記念碑主義にとって代わる‘新しい’パラダイム「世界探究」は、研究者の態度とされている探究の態度を目指すものである。今日、ある問いに対する回答が明らかでないにもかかわらず、その問いを避ける者が少なくない。そういった態度ではなく、「どんな問い Q が生じても、 x はそれについて考え、そしてできるだけ頻繁に、ある有益な回答 A に到達するためにそれについて学習する」(x は学習者)という、そして「 x は、自分が一度も出会ったことのない、一度も解いたことのない問題が含まれる状況に対しても毎回躊躇しない」(idem. p. 178) という態度を目指す。

世界について問い、その問いに答えるために必要なもののみを、必要が生じた際に学習するのである。そこで学習されるものは、記念碑主義の場合とは異なり、存在理由を伴って生じる。たとえ学習するものが過去の偉人が作り上げた作品であったとしても、 Q という問いに答えるという目的のために、それを学習するのである。‘古い’パラダイムでは学習される内容こそが大事であったが、むしろここで大事になるのは、探究の過程において獲得される研究者の態度である。記念碑主義パラダイムに基づいたカリキュラムが指導すべき内容によって決定されるのに対し、世界探究パラダイムに基づいたカリキュラムは問いの集合によって決定される。

(2) SRP といくつかの理論的概念

SRP は、世界探究パラダイムに基づいた指導・学習の過程を定式化したものである。研究者が知識を生み出す探究の過程を想定しており、‘古い’パラダイムではほとんど考慮されなかった、資料を調べ必要な情報を自ら見つけ出すという過程が前提となっている。ここでいう資料＝「メディア」には、文献だけ

でなく新聞やビデオ、現代において膨大な情報に対する検索やアクセスを容易にするインターネットをも含む。ある問い Q に答えるべく、様々な資料にあたり情報を見つけ出し、それらを学習するとともに、考察を進めていく。すると、 Q に部分的な回答を与えるような様々な新たな問いが生じる。それは、部分的な問いのこともあれば、 Q から導かれた関連の問いのこともある。そしてさらに、それらの新たな問いに取り組むことにより、場合によっては何かしらの回答が得られ、場合によってはさらに新たな問いが生じる。こうしたことが続いていくのである。この過程は図式にすれば、オープンな樹形構造になる。SRP の活動を授業に取り入れた場合、新たに生成される問いは、生徒の参照した資料・メディアや生徒の既得の知識に応じて異なったものとなる。教師は生徒の活動(問い、回答)を予見できないことも少なくないであろう。そうした探究がどこに行くか事前に決めずに進める SRP は“オープンな SRP”と呼ばれる。

SRP を特徴づけるにあたって非常に大事になる概念は、「メディア・ミリューの往還(media-milieu dialectic)」と呼ばれるものである。これは、最初の問い(Q_0 と表される)から自ら作り出した回答(A^* と表される)に至る過程の仕組みを示したものである。「メディア」とは、何らかの知識や情報を伝える意図のあるシステムである。一方、「ミリュー」は、‘自然’の一部として振る舞う教授意図をもたないシステムであり、学習過程において探究者が相互作用するものである。これは、Brousseau による教授学的状況理論(TDS)における milieu を含む。ただし TDS では、教師が設定したミリューとの相互作用によって学習が生じると考えたが、ATD では、ミリューとは別に、メディアという概念を導入し、メディア・ミリューの往還により学習が生じると考える。例えば、何らかの問いに直面した際、研究者であれば、取り急ぎメディアから

その問いの回答に関連する既存の回答 (A^\diamond と表される) を得るであろう。そこから他の既存の作品や仕事 (O と表される) との相互作用により、それが正しいのか検証したり、自らの問いの回答となりうるのか検討したりする。多くの場合、メディアから得られた最初の回答は十分でないため、もしくは新たな問いが生じるため、さらにメディアから別の既存の回答 A^\diamond を得て、探究を進めていく。こうした過程がメディア・ミリューの往還である。

3. SRP における論証活動

筆者らは、これまでの研究において、SRP における論証活動の性格についての考察を進め (宮川ほか, 2016), 教授実験によりその性格を検証してきた (濱中・大滝・宮川, 2016)。その最大の結果は、SRP のような探究活動が、‘古い’ 記念碑主義パラダイムに基づいた授業でしばしば見られる形骸化したような論証活動とは根本的に異なった、本来あるべき論証活動を可能とする、ということである。そのため本稿では、論証指導をデザインする際の原理の一つとなる数学的活動として SRP を提案し、その視点より論証指導のカリキュラム開発の方針を検討するのである。そこで以下では、SRP における論証活動の性格についての成果を簡潔に述べる。詳細は宮川ほか (2016), 濱中ほか (2016) を参照されたい。

SRP が従来の論証活動と根本的に異なる活動を可能とする理由は、基本的に、インターネット等のメディアを利用できること、そしてそれにより生じる教授学的契約の、旧来の授業の契約との異質性にある。

‘古い’ パラダイムに基づいた従来の授業では、学習者は証明すべき命題や性質が真であることを、証明する以前に知っており、真偽を確かめる必要性はほとんどない。なぜならば、証明すべき命題が教師や教科書によって与えられており、教師や教科書が偽の命題を与えないという教授学的契約が存在するか

らである (納得するだけなら帰納的確認で十分である)。それは、問題解決的な授業であってもさほど違いはない。発見すべき性質は既に決まっており、それを教師は知っている。なぜならば、学習指導要領等により教えるべき内容が既に定められており、教師はその内容についての責任をもつという契約があるからである。さらに、こうした従来の授業では、解決するにあたって必要となる道具や情報は事前に教師により与えられ、学習者がインターネット等を用いて新たな情報を見つけることはない (そういう契約である)。そして、教師が与える情報は基本的に問題解決に必要なものであるため、情報の真偽に加えて、その有用性もまた疑う必要がなくなってしまう。したがって、従来の授業における教授学的契約や、教師の用意したものが主たる情報源である (他にメディアが無い) 状況は、学習者がある数学的性質の真偽を自ら判断し、得られた情報をより深く理解し、自ら十分責任をもった回答を作り出すという営みを困難にする。それが、論証活動を形骸化させ、学習者が論証の意義を感得することを妨げているのである。

ところが、インターネットなどのメディアを前提とした SRP のような探究活動では、メディアから得られた情報 (既存の回答や様々な作品) は、その真偽をはじめ、その意味や有用性などすべてが不明である。それを用いて自らの回答 A^\heartsuit を作り出すためには、「なぜ A_i^\diamond という回答が得られたのか」「なぜ A_i^\diamond では O_i という概念を用いているのか」といった理由についての問いが発生し、得られた情報についてより深くその構造まで理解する必要が生じる。実際、これらの問いに対する回答を得ない限り、そこから自らが責任をもった回答 A^\heartsuit を作り出すことはできないのである。この理由についての問いに答える営みがまさに論証活動となり、この論証活動は、構造の理解や真偽の判定など、何かしらの存在理由を

伴って発生するのである。

4. インターネットを用いた探究事例

では、筆者らが想定している探究活動を具体的な事例を通して簡単に示そう。以下のSRPの事例は、教員養成課程の学部3年生9名（うち1名が留学生）を対象とした90分の授業4回を通じた実践である。その際、9名の学生を3名ずつの3班に分け、班ごとに探究を行うこととした。実践の詳細については、別稿（濱中ほか、2016）を参照されたい。

(1) 問いの設定

SRPに基づいた授業設計では、最初の問い Q_0 の設定が重要となる。今回は、電卓に関する次の問いを最初の問いとして設定した。

Q_0 : 四則演算と平方根のボタンしかない通常の電卓で、与えられた数の3乗根を計算するにはどうすればよいか？

極めて素朴な方法論的な問いであるこの Q_0 からどのような数学的内容が展開できるだろうか。インターネット上で検索すると、通常の電卓を用いて3乗根を計算する方法についての情報は多くみられる。例えば、5の3乗根を求める場合、次のような方法がある。以下、 $\boxed{\times}$ のように四角で囲んでいるのは電卓のボタンを示すこととする。

$\boxed{1}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{5}$, $\boxed{=}$, $\boxed{\sqrt{\quad}}$, $\boxed{\sqrt{\quad}}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{5}$, $\boxed{=}$, $\boxed{\sqrt{\quad}}$,
 $\boxed{\sqrt{\quad}}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{5}$, $\boxed{=}$, $\boxed{\sqrt{\quad}}$, $\boxed{\sqrt{\quad}}$, ...

というように、適当な値（例えば1）を入力したのち、 $\boxed{\times}$, $\boxed{5}$, $\boxed{=}$, $\boxed{\sqrt{\quad}}$, $\boxed{\sqrt{\quad}}$ を繰り返し入力すると、繰り返し部分を入力した直後の値は、5の3乗根に近づいていき、やがて変化しなくなる。変化しなくなったときの値が、5の3乗根の近似値を示している。

この方法の妥当性は、 $a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5 \times a_n}}$ という漸化式で与えられる数列が5の3乗根に収束することから導かれる。

このように、この問い Q_0 は、数列・漸化式・極限・収束・指数法則・級数などといった、

高等学校で学ぶ標準的な数学的内容と関係している。探究を進めれば、それだけでなく2進数や整数論との関わりなども生じる（濱中、2014）。また、上記の方法において、繰り返し部分の $\boxed{\sqrt{\quad}}$ を押す回数を増やすとどうなるか、また、3乗根ではなく一般の n 乗根を求めるにはどうすればよいか等、 Q_0 を基にして、あらたな数学的な問いが豊富に考えられる。

(2) 学生の論証活動の様相

学生の探究においてはSRPの固有な様相として次のような事実が観察された。第一に、授業者に過度に依存するという態度が見られなかったことである。もちろん、授業者がアドバイスすることはあったが、アドバイスが来なければ何もしない、といった様子はなく、あくまで教師もまた一つのメディアであるという態度で接しており、自分で解決する責任があるという自覚があったと思われる。二点目として、彼らが既知の問題に自分の探究を限定しようとせず、未知の問題へも躊躇なく取り組もうとした点あげられる。実際、3つの班のうちの1つの出した結果は、探究過程を見守る授業者にも途中段階では一定の解答が得られるのかどうか半信半疑であった。三点目としては、メディア・ミリューの往還が見られたことである。どの班も初回の授業にインターネットで、電卓による3乗根の求め方を示す情報を見つけている。しかし、それを鵜呑みにはせず、電卓で確認したり、自身がすでに確信している数列・漸化式といった理論によって、その方法を理解したりしようとしていた。特に、1班ではそうしたメディアの示す方法の理解によって、自ら方法を発展させ、7乗根や15乗根の求め方に至っている。さらにこの方法だけでは5乗根が求められないことに気づき、またメディアに情報を求めていった。これは、まさにメディア・ミリューの往還といえるだろう。

また、彼らの探究を見ていると、方法論的問いから、論証的な問いへ進む様子が見られ

た。例えば、1 班においてはメディアから得られた方法論を理解したうえで、その真偽「漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$ を用いて本当に 3 乗根が得られるのか」を確かめ、次にその方法の原理の理解「どうして漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 1)$ を使うのか」へと向かい、その原理の理解のもとで新たな結果「 $n = 2^p - 1$ のときの n 乗根を求める方法」へと向かっている。また、2 班においても、中盤以降、メディアから得られた方法論の正当性をどのように証明するか、という点に焦点を当てて議論が進んでいる。このように SRP による状況、もしくはその状況が作り出した探究型の契約が、方法論的問いを始点としても、数学的な構造の理解を促し、正当性や妥当性についての論証活動へと学生を向かわせていったことが分かる。

5. 考察

世界探究パラダイムとそれに基づいた SRP は、中等教育における論証指導カリキュラムの開発にあたって多くのことをわれわれに考えさせる。以下では、本研究プロジェクトにおけるカリキュラム開発の直接的な示唆となるであろう 4 点について考察する。

(1) 論証指導が目指すもの

世界探究パラダイムは、何かしらの特定の内容の習得・習熟ではなく、研究者の探究の態度の獲得を目標とするものであった。その態度は、何らかの問いに対し自らの回答を作り上げるために、未知の問いや概念が出てきても躊躇することなく、必要なものは必要に応じて学習し、前向きに探究を進めていくというものであった。この世界探究パラダイムの視座からすれば、論証指導は何を目指すのであろうか。それはおそらく研究者の探究の態度の一部、論証に関わる探究の態度が論証指導の目標となろう。この“論証の態度”とも呼べるものは、探究における論証の意義、

すなわち論証活動（数学においても、数学外においても）が探究の中心的なものであることを認識し、論証活動に前向きに取り組む態度である。具体的には、自らの回答を作り上げるために、「なぜ」という理由の問いを設定し、数学的対象をはじめ、対象の構造等を深く理解するために証明を読み、実際に自身の立てた問いを証明する。そして他者の批判から自らの回答を擁護するために、論拠を作り上げより完全な証明を目指す。こうしたことに躊躇しない態度が、論証指導の目指すところとなろう。ただし、この論証の態度はそれを教えることにより到達するものではない。探究の態度と同様、探究を実際に行なう中で到達されるものである。

(2) 論証指導カリキュラムにおける問い

本プロジェクトで進めてきた理論的基盤の整備では、論証指導に関する「内容」と「水準」を提示した（宮川ほか, 2015）。論証指導として水準を含め特定の内容（e.g. 直接証明、数学的帰納法）を指導対象とするのは、従来の‘古い’記念碑主義パラダイムの考え方である。世界探究パラダイムに基づいた学校数学のカリキュラムは、指導すべき内容の集まりではなく、問いの集合によって構築される。学習者は、これらの問いについての探究を進める中で、必要となるものを学習し、必要のないものは学習しないのである。そのため、この最初の問いの選択がその後の学習に大きな影響を与える。探究活動は基本的にオープンであり、それが最初の問いからどの方向に向かうのか、そしてその探究が豊かなものとなるか否かは学習者次第である。しかしながら、カリキュラム開発を念頭に置けば、すべて学習者任せであれば探究の方向性や質にあまりにも多くのばらつきが生じかねず、国定カリキュラムとして国家が統制することはできない。そして数学教育の現状は記念碑主義パラダイムが中心であり、指導すべき内容が定められている。この現状への対処方法の一

つは、最初の問いに「制御の問い(control questions)」もしくは「補助的な問い(side questions)」を加えることである(Chevallard, 2015). それにより、探究において特定の作品 O がその有用性を伴って生じるようにするのである. なお, ATD では、何らかの教えるべき対象が存在し、それが探究の過程で生じるように設定した SRP は、“目的づけられた SRP” と呼ばれる.

論証指導のカリキュラム開発においては、目的づけられた SRP が現実的であろう. この SRP を通して、論証に関わる内容を学習しつつ、論証の態度の獲得を目指すのである. 例えば、数学的帰納法という証明方法を取り上げよう. わが国の高等学校数学においては、記念碑主義に基づき、これを一つの訪問すべき記念碑としている. 世界探究パラダイムの視点からこの作品の指導はいかにデザインできるだろうか. 作品の学習は探究の中で生じるため、数学的帰納法が学ばれるべき知識となるような、学習者にとって素朴かつ自然で、探究すべきと思える問いを提示する必要がある. それがいかなる問いか、今のところわからないが、その問いを見つける必要がある. 一方、様々な問いの探究において、数学的帰納法という知識を学ぶことが生じなければ、世界探究パラダイムの視点からすれば、その作品には有用性も存在理由もないため、カリキュラムより消滅すべき内容となる.

(3) 単元間や領域間のつながり

本研究プロジェクトでは、数学的活動に基づく領域間ネットワーク化による論証指導カリキュラムの開発を目指している. 数学的活動を通して単元間や領域間のつながりを構築しようとするのである. 世界探究パラダイムに基づいた SRP のような探究活動は、この目的にまさに適したものである. 世界探究パラダイムでは、問いに答えるためという探究の文脈が常にあるため、数学的な内容は存在理由と単元間や領域間のつながりを伴うもので

ある. 先の電卓の事例では、数列・漸化式・極限・収束・指数法則・級数などの種々の数学的概念が、一つの探究の文脈の中で、つながりをもって立ち現れる. 探究活動の方向性によって、作られるつながりは異なるものの、記念碑主義パラダイムに基づいた活動のように、指導内容が細分化され、存在理由が消滅し、そのつながりを別途考えなければならないということは、世界探究パラダイムに基づいた活動ではそもそもないのである.

(4) 構築される理論

本プロジェクトで提案した枠組みでは、論証の背後にある理論をその性質から、「現実世界の論理」、「局所的理論」、「準公理的理論」と3つの水準に区分した(宮川ほか, 2015). そして、公理的なものがより数学的なものと考えた. では、世界探究パラダイムに基づいた探究活動ののち構築される理論はいかなるものであろうか. 上述のように、SRP のような探究活動は単元間や領域間のネットワーク化を促進する. ただし、このネットワーク化により作り上げられた理論は、準公理的理論ではない. 公理系を前提とし、論証により数学的な概念間に細かなつながりが生じ構築された理論というよりも、問いへの回答を作り上げる過程において単元や領域を超えた種々の概念が問いを介してつながり構築された局所的理論群である. もちろん他者の批判から自らの回答を擁護するために、自らの論証を完全無欠のものとする必要があれば、公理的なアイデアが発生することもある. しかし、学校教育で想定される通常の探究活動が小さなコミュニティで進められることから、他者や自らを説得するために公理的なアイデアが発生することは考えにくい. そうであれば、世界探究パラダイムに基づいた論証指導では、準公理的理論へ向かうのではなく、お互いにつながりをもった複数の局所的理論群の構築とその理解へと向かうのではないだろうか.

6. おわりに

世界探究パラダイムの視座から論証指導に目を向けると、鍵となるのは問いであり、それに答えるための探究的態度であり、そのための論証活動・数学的活動である、と考えられる。ここに登場する問い・態度・活動はいずれも動的なものである。本プロジェクトでは、これまで論証を捉えるための理論的枠組みとして、言明・証明・理論という静的な要素を考察してきた(宮川ほか, 2015)。実際の論証指導においては、動的な論証の営みにおいてそれらが展開される。その結果として目指されるものは、特定の技能といった閉じた態度と能力ではなく、未知の問いに対応できる開かれた態度と能力となるのであろう。その一方で、中等教育の現場で実現可能な論証指導カリキュラムを具体化していくことが課題となる。本稿の事例と考察は、そこに重要な示唆を与えるものとする。今後、問いによる単元間や領域間のネットワーク化、メディアを用いた探究活動による論証指導の具体化等についてさらに考察を進めていきたい。

注

[1] 詳細は、日本数学教育学会第2回及び第3回春期研究大会の論文集、プロジェクトのホームページを参照のこと。
(<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~shinno/hi-project/Top.html>)

引用・参考文献

Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. In Cho, S. J. (Ed.) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education*, 173-187. Springer. [シュバラール, Y. (2016). 大滝孝治・宮川健 (訳). 「明日の社会における数学指導—来たるべきカウンターパラダイムの弁護—」. 上越数学教育研究, 第31号, pp.

73-87.]

濱中裕明. (2014). 「電卓を用いた数学教材について」. 数理解析研究所講究録 1920 数学教師に必要な数学能力の育成法に関する研究, pp.113-120.

濱中裕明・大滝孝治・宮川健. (2016). 「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (2) ~電卓を用いた実践を通して~」. 全国数学教育学会第43回研究発表会発表資料 (於広島大学).

<http://hdl.handle.net/10132/16102>

国宗進. (1987). 「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」. 数学教育学論究, 47/48, 3-23.

宮川健・濱中裕明・大滝孝治. (2016). 「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (1) ~理論的考察を通して~」. 全国数学教育学会第43回研究発表会発表資料 (於広島大学).

<http://hdl.handle.net/10132/16101>

宮川健・真野祐輔・岩崎秀樹・國宗進・溝口達也・石井英真・阿部好貴. (2015). 「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導の理論的基盤」. 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第21巻, 第1号, 63-73.

溝口達也. (2015). 「カリキュラム開発における数学的活動とそのネットワークの方法論的考察」. 日本数学教育学会第3回春期研究大会論文集, 57-62.

文部科学省. (2010). 平成22年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書, 国立教育政策研究所.

謝辞 本稿の作成にあたり大滝孝治氏(北海道教育大学)にご協力いただきました。ここに感謝の意を表します。また本研究は、JSPS 科研費(15H03501)及び平成27年度全国数学教育学会ヒラバヤシ基金研究助成の補助を受けて進められました。